極限論と集合論

能代　清著

岩波書店

極限論と集合論

能　代　清　著

岩　波　書　店

改版にあたって

旧著'極限論と集合論'の第1刷が発行されましたのは1944年11月10日であります．それ以来，旧著は幸運にも高等学校・大学の多くの生徒・学生の諸君に愛読されて今日に至りました．このたび，岩波書店の御厚意で，旧著を当用漢字，ひらがなのわかり易い現代文に改め，図版を改良して，全体を通じて読み易い体裁に組み直すことができましたことは，著者のひじょうな喜びであります．

本書が，旧著と同様に，高等学校・大学の生徒・学生の諸君に親しまれて多少とも役立つことを期待します．拙著の改版にあたって，たいへんお世話になった岩波書店編集部の荒井秀男氏に対して厚く感謝の意を表します．

1970年9月23日

千葉県野田市において

能　代　　清

序　　言

微分積分学ならびに函数論を厳格に解説するためにはその根底に極限論と集合論の知識が望ましいことはいうまでもありません．しかしながら高等学校において微分積分学を教授するにあたって詳細に数の性質および極限論を説明するには時間の余裕もなくまた将来各方面に進む生徒たちに一様に極限論の詳細を説明することは果して有意義であろうか，これには種々の見解が行われているように思います．

本書は微分積分学の基礎になる数の性質および極限論の厳格な知識を得たい人々，さらに進んで微分積分学および函数論において重要な役割を持つ集合論の大体を学びたい人々のための参考書としてまとめたものであって，高等学校ならびに大学初年級の生徒学生諸君に役立てば幸であります．

本書の内容について一言して置きます．恩師北大教授吉田洋一先生の御指導と御激励の下に著者がさきに岩波数学講座の中で執筆した‘実数および複素数の性質’および‘集合論’についてはその後北大数学教室，第一高等学校ならびに東京物理学校において講義するに際して種々改良を要する点に気付きました．今回畏友弥永昌吉，吉田耕作両君ならびに岩波書店の御慫慂もあって前述の二拙著に広範囲の修正を施しさらに新しく点集合論の一章を巻末に追加して“極限論と集合論”の一冊にまとめる機会を得たことは著者のひじょうな喜びであります．

拙著を公にするに際して恩師吉田洋一先生，畏友弥永昌吉，吉田耕作両君ならびに岩波書店布川角左衛門氏に対して厚く感謝の意を表します．

昭和 17 年 8 月 1 日

名古屋において

能　代　清

目　　次

改版にあたって

序　　言

第1章　有　理　数 ………………………… 1

第2章　無　理　数 ………………………… 4

第3章　極限の概念 ………………………… 26

第4章　ベキ，対数，小数 ………………………… 41

第5章　カントルの無理数論 ………………………… 64

第6章　一般集合論 ………………………… 76

第7章　点 集 合 論 ………………………… 126

索　　引 ………………………… 161

第1章　有　理　数

1. 有理数

物の個数を表わすには自然数 $1, 2, \cdots, n, \cdots$ で十分である．自然数の範囲内において加法および乗法はつねに可能であるが減法および除法は必ずしも行われない．そこでまず減法がつねに行われるようにするためには零および負の整数を導入する必要が起る．負の整数 $-1, -2, \cdots, -n, \cdots$ に対して自然数のことを正の整数という．整数の範囲内においては加，減，乗の三つの演算はつねに可能であるが除法は必ずしも行われない．そこでまた正および負の分数を導入して数の範囲を有理数に迄高める必要が起る．さてわれわれのこれからの方針は有理数の性質迄を既知と仮定してデデキント(R. Dedekind)の立場にしたがって有理数の切断で実数を定義するのであるがそのためには有理数の性質を一応想起しておくことにする．

定義1　正および負の整数および分数の全体と零とを総称して有理数という．

有理数の主要な性質をあげよう．今後断りのある迄 a, b, c 等の文字は有理数を表わすものとする．

大　小　二つの有理数 a, b が同一の数のとき，$a=b$ と書き，相異なるとき，$a \neq b$ と書く．

(1)　$a \neq b$ であるときは，$a<b$ かまたは $a>b$ である．

(2)　$a=b$ であるときは，$a<b$ でも $a>b$ でもない．

(3)　$a<b$ で $b<c$ のときは，$a<c$ である．

注意　$a<b$ のかわりに $b>a$，また $a>b$ のかわりに $b<a$ とも書く．$a>0$, $a=0$, $a<0$ にしたがって a は正，零，負という．

有理数の集合は大小の順序のある集合である．

四 則

A. 和 a, b が有理数であるとき，$a+b$ もまた一つの(a と b によって一意的に定まる)有理数である．つぎの法則が成立する：

$$a+b = b+a \qquad (\text{交換法則}),$$

$$a+(b+c) = (a+b)+c \qquad (\text{結合法則}),$$

$$a+0 = a.$$

$a<b$ であるときは，$a+c<b+c$ である．

B. 差 a, b が有理数であるとき，$a-b$ もまた一つの(a と b によって一意的に定まる)有理数である．$0-b$ のかわりに単に $-b$ と書く．$b+(a-b)=a$.

C. 積 a, b が有理数であるとき，ab もまた一つの(a と b によって一意的に定まる)有理数である．つぎの法則が成立する：

$$ab = ba \qquad (\text{交換法則}),$$

$$a(bc) = (ab)c \qquad (\text{結合法則}),$$

$$(a+b)c = ac+bc \qquad (\text{配分法則}).$$

$$1\cdot a = a, \qquad 0\cdot a = 0.$$

$a<b$ で $c>0$ であるときは，$ac<bc$ である．

D. 商 a, b が有理数であるとき，a/b もまた一つの(a と b によって一意的に定まる)有理数である，ただし $b\neq 0$ とする．$b(a/b)=a$.

すなわち有理数の範囲においては四則の演算は除数が 0 の割算を例外としてつねに可能でかつその結果は一意的である．

アルキメデス(Archimedes)の定理

a を任意の有理数とすれば $n>a$ である正の整数 n がある．

注意 つぎの事実は重要である．有理数 a, b の積 ab が 0 となるのは a かまたは b の少なくとも一方が 0 のときかつこのときに限られる．a, b のいずれか一方が 0 であるならば $ab=0$ は明らかである．$a\neq 0$, $b\neq 0$ であるときは $ab\neq 0$ を証明すればよい．それには，(i) $a>0$, $b>0$, (ii) $a<0$, $b>0$, (iii) $a>0$,

$b<0$, (iv) $a<0$, $b<0$ と場合を分けて前の法則を適用すればよい.

稠密性　二つの有理数 a, c が相異なるとき，有理数 b が一方より大で他方より小であるならば b は a と c の間にあるという．二つの相異なる有理数 a, c の間に少なくとも一つの有理数 b が存在する．この性質を**稠密性**という．このような b の存在は $b=(a+c)/2$ をとれば明らかである．少なくとも一つ b が存在すると述べたが実は無限に多くある．なぜかといえば，a と b の間に他の有理数が存在するからである.

2. 有理数の組分け

a を任意の一つの有理数とするとき，a によって有理数の全体はつぎのように A_1, A_2 の二組に分けることができる．a より小なるおのおのの数を A_1 組に入れ，a より大なるおのおのの数を A_2 組に入れる．つぎに，a を任意に A_1 組か A_2 組に入れる．a が A_1 に属すれば A_1 の最大数であり，A_2 に属すれば A_2 の最小数である．a が A_1 に属するか A_2 に属するかによって分け方が二通りできるが，いずれにしても A_1 のおのおのの数は A_2 のおのおのの数よりも小である.

逆に，有理数の全体が A_1, A_2 のいずれもが空でなく A_1 のおのおのの数が A_2 のおのおのの数よりも小であるようになんらかの方法で A_1, A_2 の二組に分けられたとき，A_1 に最大数があるかまたは A_2 に最小数があるかその二つの場合しか起らないであろうか．この問題は次章で考えよう.

第2章　無　理　数

3. 切断の定義

無理数の理論をデデキントにならって，切断を基礎にして述べよう．

定義 2　有理数の全体がつぎの条件を満足するようになんらかの方法で二組 A_1, A_2 に分けられたとする：

(1)　A_1, A_2 のいずれも空ではない，換言すれば A_1, A_2 のいずれか一方がすべての有理数を含むということはない．

(2)　A_1 のおのおのの数は A_2 のおのおのの数よりも小である．

この組分けを**切断**(Schnitt)といい，A_1 を切断の**下組**，A_2 を**上組**という．また下組に属する数のことを**下数**，上組に属する数を**上数**という．

一つの切断はその下組が与えられると一意的に定まる．なぜかといえば上組は下組の数以外のすべての数よりなるからである．同様なことは上組が与えられたときにもいわれる．

今後しばしば集合という言葉を用いるから簡単に**集合**について述べておこう．物の集りを**集合**というのであるが，集合に属する物は互いに区別ができることおよびその物が集合に属するか否か理論上判定できることを要する．集合を形成する個々の物のことを要素という．極限論で取り扱う集合は要素が数の場合であるから，その数が集合に属するか否かが明確であればよい．

A, B という二つの集合があってつぎのような対応が付けられたとする：

(1)　この対応によれば，B のおのおのの要素には A の一つの要素が対応ししかも相異なる B の要素には相異なる A の要素が対応する．

(2)　A のいかなる要素も(1)の対応に洩れていない．

この場合には(1), (2)において A と B を入れ代えても成立する．この対応の

ことを**一対一の対応**という．二つの集合 A, B の間に一対一の対応が付けられた場合に A と B とは**対等**(equivalent)という．

また A, B という二つの集合があって A のおのおのの要素が同時に B の要素である場合に A は B の部分集合であるという．A と B とが互いに他の部分集合であるときは，明らかに両集合は一致する．

例　A をすべての自然数(正の整数)からなる集合，B を 1 以外のすべての自然数から成る集合とすれば，A と B とは対等である．A の要素 n に B の要素 $n+1$ を対応させれば，一対一の対応が付くからである．また B は A の部分集合である．

集合についての詳細は集合論にゆずり，ふたたび本論に立ち戻ることにしよう．

さて，一つの有理数の集合が与えられたとき，これが一つの切断の下組であるか否かを判定するつぎの定理がある．

定理 1　一つの有理数の集合 M が切断の下組であるための必要かつ十分な条件はつぎの(1)および(2)が成立することである：

(1)　M は空でなく，かつ M に属さない一つの有理数が存在する．

(2)　一つの数が M に属すると，いかなる数であっても，それより小なる数は M に属する．

証明　必要条件：M が一つの切断の下組 A_1 であるとする．A_1 が(1)を満足することは明らかである．a_1 を A_1 に属する任意の有理数とすれば，$b_1<a_1$ である有理数 b_1 は上組 A_2 に属することはできない．仮に b_1 が A_2 に属するとすれば切断の定義から $b_1>a_1$ でなければならない．

十分条件：M に属さないすべての有理数の集合を A_2 で表わす．A_2 に属するおのおのの数は M に属するおのおのの数より大きい．仮に，A_2 に属する数 a_2 が M に属する数 a_1 より小であるとすれば，仮定(2)によって a_2 は M に属するはずである．

まったく同様にしてつぎの定理が証明される.

定理2 一つの有理数の集合 M が切断の上組であるための必要かつ十分な条件はつぎの(1)および(2)が成立することである:

(1) M は空でなく，かつ M に属さない一つの有理数が存在する.

(2) 一つの数が M に属すると，いかなる数であっても，それより大なる数は M に属する.

4. 切断の種類

有理数の切断は論理上つぎの四種が考えられる:

第一種 下組に最大数があり，上組に最小数がない.

第二種 下組に最大数がなく，上組に最小数がある.

第三種 下組に最大数がなく，上組に最小数がない.

第四種 下組に最大数があり，上組に最小数がある.

しかしながら，最後の場合は実際には起らない．下組の最大数を a_1，上組の最小数を a_2 とすれば，稠密性によって a_1 と a_2 の間に一つの有理数が存在し，これは下組にも上組にも属さないことになるからである．第一種および第二種の切断の存在は前章の第2節に示してある.

つぎに第三種の切断が実在することを示そう.

二乗が2よりも大なるすべての正の有理数を組 A_2 に入れ，他のすべての有理数を組 A_1 に入れる．A_1 組のおのおのの数は A_2 組のおのおのの数よりも小であるから，明らかにこの組分けは一つの切断である．まずいかなる有理数の二乗も2に等しくなれない．仮に一つの有理数 a が $a^2=2$ とすれば，p, q を互いに素な整数として $a=p/q$ とおくことができるから，つぎの等式が成立する: $p^2=2q^2$．これより p, q はともに偶数でなければならないことになって仮定に反する．つぎに下組 A_1 に最大数なく，上組 A_2 に最小数がないことを証明する．m を下組 A_1 の最大数とすれば，$m+\varepsilon$ は上組 A_2 に属するから

$$m^2 < 2 < (m+\varepsilon)^2,$$

ここに ε は1より小なる任意の正の有理数とする.

$$m^2 < 2 < m^2+2m\varepsilon+\varepsilon^2.$$

ゆえに

$$2-m^2 < 2m\varepsilon+\varepsilon^2 < 2m\varepsilon+\varepsilon = (2m+1)\varepsilon.$$

ゆえに

$$\frac{2-m^2}{2m+1} < \varepsilon.$$

これは1よりも小なる任意の正の有理数 ε が $(2-m^2)/(2m+1)$ という一定の正の数よりも大であることを示すから不合理である. 上組 A_2 に最小数がないこともまったく同様に証明できる.

任意の有理数 a を与えると, これに対応して第一種の切断(a を下組の最大数とする)および第二種の切断(a を上組の最小数とする)が得られる(第1章第2節参照). 逆に任意の第一種および第二種の切断を与えるとこの切断を作る有理数が存在する. 第一種では下組の最大数, 第二種では上組の最小数がそれである. しかるにわれわれは上に述べたように, 有理数によって作ることができない第三種の切断の存在を知ったのである. 第一種の切断と第二種の切断とは本質的には同一であると見てよろしい. なぜかといえば, 第一種の切断において下組から最大数を取り去って上組に移せば第二種の切断が得られ, 逆に第二種の切断において上組から最小数を取り去って下組に移せば第一種の切断が得られるからである.

これから, 切断の大小, 加減乗除を定義するのであるが, その場合に煩雑を避けるため, 第一種と第三種の切断ばかりを考えることにする[1]. なお今後使用する記号について説明する. これまでのように数(有理数)を表わすに $a, b, c, \cdots$ を, 切断を表わすに一般に $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ を, 切断 α の下組 A_1, 上組 A_2 を明示

1) 結局上組に最小数がない切断.

するために $\alpha=(A_1, A_2)$ を用い，特に a が下組の最大数である第一種の切断を a^* で表わす.

5. 切断の大小

切断[1] $\alpha=(A_1, A_2)$, $\beta=(B_1, B_2)$ において，A_1 が B_1 の数ばかりから成り，逆に B_1 が A_1 の数ばかりから成るときは，下組 A_1, B_1 は互いに一致するから，両切断も一致し，$\alpha=\beta$ である．その他の場合，すなわち A_1 が B_2 の数を少なくとも一つ含むかまたは B_1 が A_2 の数を少なくとも一つ含む場合は $\alpha\neq\beta$ である．これら二つの場合は両立しない．仮に両立したとすれば，α の下数 a_1 が β の上数 b_2 に等しく，同時に β の下数 b_1 が α の上数 a_2 に等しいということが起る．ゆえに

$$a_1 = b_2 > b_1 = a_2 \qquad (\text{不合理}).$$

A_1 が B_2 の数を少なくとも一つ含むときは実は無限に多く含む．なぜかといえば B_2 には最小数がないから A_1 に含まれる任意の一つを b_2 とすれば，$b_2'<b_2$ という B_2 の数 b_2' がある．これはいうまでもなく A_1 に含まれるからである.

定義3　A_1 が B_2 の数を少なくとも一つ(したがって無限に多く)含むならば

$$\alpha > \beta \qquad (\text{または}\ \beta<\alpha)$$

とする.

注意　二つの切断 α, β が与えられた場合に,

$$\alpha < \beta, \qquad \alpha = \beta, \qquad \alpha > \beta$$

のいずれか一つが成立し，どの二つも両立しないことはすでに証明されている.

定理3　$\alpha<\beta$ かつ $\beta<\gamma$ であるときは $\alpha<\gamma$ である.

証明　$\alpha=(A_1, A_2)$, $\beta=(B_1, B_2)$, $\gamma=(C_1, C_2)$ とする．$\alpha<\beta$ より B_1 は A_2 の数を含み，$\beta<\gamma$ より C_1 は B_2 の数を含む．ゆえに C_1 は B_1 のすべての数を含み，したがって A_2 の数を含む．ゆえに $\alpha<\gamma$.

---

1)　第一種または第三種.

定義 4 $\alpha > 0^*$, $\alpha = 0^*$, $\alpha < 0^*$ にしたがって切断 α は正, 零, 負という.

定理 4 $a < b$ であるならば, $a^* < b^*$ である.

証明 a^*, b^* はそれぞれ a, b を下組の最大数とする切断である. ゆえに b は b^* の下数で同時に a^* の上数である. ゆえに $a^* < b^*$.

有理数とこれに対応する第一種の切断の間に同じ大小の順序が成立する.

定理 5 b が切断 α の上数であるとき $b^* > \alpha$ である. b が切断 α の下数であるとき $b^* \leqq \alpha$ である. ただし等号が成立するのは, α が第一種の切断でかつ b が α の下組の最大数である場合に限られる.

証明 b が α の上数のとき, b は b^* の下数であるから, $b^* > \alpha$ である. b が α の下数のとき, b は α の下組の最大数であるかまたは b より大なる数 b_1 が α の下組にある. 前の場合には $b^* = \alpha$, 後の場合には b_1 は b^* の上数かつ α の下数であるから $\alpha > b^*$ である.

定理 6 α を任意の切断とすれば, α よりも大なる無限に多くの第一種の切断および α より小なる無限に多くの第一種の切断が存在する.

証明 定理 5 によれば, α の一つの上数 b に相当して α よりも大なる第一種の切断 b^* があり, また α の一つの下数 b に相当して α より小なる第一種の切断 b^* がある[1].

定理 7 α, β を二つの切断とし, $\alpha < \beta$ であるときは $\alpha < a^* < \beta$ であるような切断 a^* は無限に多く存在する.

証明 $\alpha < \beta$ より β の下組は無限に多く α の上組の数 a を含む. ゆえに $\alpha < a^* < \beta$ であるような a^* は無限に多くある.

6. 切断の和

切断[2]

---

1) α が第一種の場合には, 下組の最大数に等しい下数 b は例外とする.

2) 第一種または第三種.

$$\alpha=(A_1, A_2), \qquad \beta=(B_1, B_2)$$

が与えられたとき，α および β の上数を代表的にそれぞれ a_2 および b_2 で表わし，a_2+b_2 の形のすべての数の集合を M とする．M はつぎの性質を持つ:

(1) M には最小数がない．なぜかといえば，A_2, B_2 はいずれも最小数がないからである[1]．

(2) M は空ではない(明白)．M に属さない数がある．a_1 および b_1 をそれぞれ α および β の下数とすれば，a_1+b_1 は a_2+b_2 の形に書けない．なぜかといえば，$a_1<a_2$，$b_1<b_2$ であるからである．

(3) m が M に属すれば，$n>m$ である数 n は M に属する．

$n=m+d$ とおけば，d は正の有理数，$m=a_2+b_2$ であるから，

$$n=m+d=(a_2+b_2)+d=a_2+(b_2+d),$$

b_2+d は β の上数であるから b_2' とおけば

$$n=a_2+b_2'.$$

(2)と(3)によれば M は一つの(M によって一意的に定まる)切断 γ の上組である．(1)より切断 γ は第一種または第三種である．

定義5 γ を α に β を加えてできた切断または α と β の和といい，$\gamma=\alpha+\beta$ と書く．

この定義によれば，$\alpha+\beta$ は切断 α, β によって一意的に定まる切断で，交換，結合の法則が成立することも明らかである．

例 $\alpha+0^*=\alpha$ を証明してみよう．

$\alpha+0^*$ の上組と α の上組が一致することを示せばよい．

(1) $\alpha+0^*$ の上数は a_2+正の数(a_2 は α の一つの上数)であるからいうまでもなく α の上数である．

(2) 逆に α の一つの上数を a_2 とすれば，上組には最小数がないから，a_2 よ

---

1) M に最小数があるとしてこれを a_2+b_2 とする．a_2 よりも小なる a_2' が A_2 に含まれるから $a_2'+b_2<a_2+b_2$ となり，これは不合理である．

りも小なる上数a_2'がある．したがって，

$a_2=a_2'+$正の数，ゆえにa_2は$\alpha+0^*$の上数である．

定理 8　$\alpha<\beta$であるときは，$\alpha+\gamma<\beta+\gamma$である．

証明　まず任意に正の有理数dを与えた場合に，いかなる切断においても，適当に上数，下数を選び，その差をdに等しくできることを証明しておく．任意に一つの下数および上数をとり，それぞれaおよびbとする．$a+nd>b$であるように整数nをとったとすれば[1]，

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ \cdots,\ a+nd$$

においてaは下数，$a+nd$は上数であるから，相隣る二数で互いに相異なる組に属するものがある．この二数の差はdである．さて$\alpha<\beta$よりαの上数で同時にβの下数であるような数は無限に多くある．その中の二数を$m, n\ (m>n)$とする．$\alpha+\gamma$の上数で同時に$\beta+\gamma$の下数であるような一つの数があることを示せばよい．適当にγの下数c_1，上数c_2を選んで

$$c_2-c_1=m-n$$

となるようにできる．$n+c_2=m+c_1$をlとおけば，nはαの上数であるから$n+c_2$は$\alpha+\gamma$の上数，mはβの下数であるから$m+c_1$は$\beta+\gamma$の下数である．

定理 9　$$a^*+b^*=(a+b)^*.$$

証明　x^*の上組はxよりも大なるすべての数より成る．

(1)　a^*+b^*の一つの上数は$(a+d)+(b+d')\ (d>0,\ d'>0)$の形の数である．これは$(a+b)+(d+d')=(a+b)+e\ (e=d+d'>0)$であるから$(a+b)^*$の上数である．

(2)　$(a+b)^*$の上数は$(a+b)+d\ (d>0)$の形の数，これは書き直せば$\left(a+\frac{d}{2}\right)+\left(b+\frac{d}{2}\right)$であるから$a^*+b^*$の上数である．

定理 9 によれば，

第一種の切断の加法は対応する数の加法に帰着する．

1)　$n>(b-a)/d$という整数nの存在はアルキメデスの定理による．

7. 切断の差

切断[1)]

$$\alpha=(A_1,A_2),\qquad \beta=(B_1,B_2)$$

が与えられたとき，代表的に α の上数を a_2，β の下数を b_1 で表わし，a_2-b_1 の形のすべての数の集合を M とする．M はつぎの性質を持つ:

(1) M には最小数がない．なぜかといえば A_2 に最小数がないからである．

(2) M は空ではない(明白)．M に属さない数がある．a_1 を α の下数，b_2 を β の上数とすれば，a_1-b_2 は a_2-b_1 の形に書けない．仮に $a_1-b_2=a_2-b_1$ とすれば，$0>a_1-a_2=b_2-b_1>0$ であるから不合理である．

(3) m が M に属すれば，$n>m$ である数 n は M に属する．

$n=m+d$ とおけば，d は正の有理数，$m=a_2-b_1$ であるから，

$$n=m+d=(a_2-b_1)+d=(a_2+d)-b_1,$$

a_2+d は α の上数であるから a_2' とおけば，

$$n=a_2'-b_1.$$

(2)と(3)から M は一つの(M によって一意的に定まる)切断 γ の上組である．(1)より切断 γ は第一種または第三種である．

定義 6 γ を α から β を引いてできた切断または α と β の差といい，$\gamma=\alpha-\beta$ と書く．$0^*-\beta$ の代りに単に $-\beta$ と書く．

この定義によれば，$\alpha-\beta$ は切断 α,β によって一意的に定まる切断である．

定理 10 $$\beta+(\alpha-\beta)=\alpha.$$

証明 $\beta+(\alpha-\beta)$ の上組と α の上組とが一致することを示せばよい．それには $\beta+(\alpha-\beta)$ の上数が α の上数であることおよびその逆がいわれるとよい．

b_1,b_2,a_2 をそれぞれ β の下数，上数，α の上数とすれば，$\beta+(\alpha-\beta)$ の上数は $b_2+(a_2-b_1)$ の形の数であるから，

$$b_2+(a_2-b_1)=a_2+(b_2-b_1)>a_2.$$

---

1) 第一種または第三種．

ゆえに $b_2+(a_2-b_1)$ は α の上数である.

逆に, α の上数 a_2 は上組に最小数がないから, $a_2'<a_2$ である上数 a_2' がある. 適当に β の上数 b_2, 下数 b_1 を選んで

$$a_2-a_2'=b_2-b_1$$

とできる(定理8の証明参照). ゆえに

$$a_2=a_2'+(b_2-b_1)=b_2+(a_2'-b_1).$$

ゆえに a_2 は $\beta+(\alpha-\beta)$ の上数である.

定理 11 $$a^*-b^*=(a-b)^*.$$

証明 a^*-b^* の上数は $(a+d)-(b-d')$ $(d>0,\ d'\geqq 0)$ の形の数である. これは, $(a-b)+(d+d')$ と書かれ, $d+d'>0$ であるから, $(a-b)^*$ の上数である. 逆に $(a-b)^*$ の上数は $(a-b)+d$ $(d>0)$ であるから, $\left(a+\frac{d}{2}\right)-\left(b-\frac{d}{2}\right)$ と書き直せば, a^*-b^* の上数である.

定理11によれば,

第一種の切断の減法は対応する数の減法に帰着する.

8. 切断の積

切断[1)]

$$\alpha=(A_1, A_2), \qquad \beta=(B_1, B_2)$$

はともに正とする. 換言すれば, α および β の下組に正の数があるものとする. α および β の上数を代表的にそれぞれ a_2 および b_2 (いずれも正)で表わし, a_2b_2 の形のすべての数の集合を M とする. M はつぎの性質を持つ:

(1) M には最小数がない. なぜかといえば A_2, B_2 はいずれも最小数がないからである.

(2) M は空ではない(明白). M に属さない正の数がある. a_1 および b_1 をそれぞれ α および β の正の下数とすれば, a_1b_1 は a_2b_2 の形に書けない. なぜか

1) 第一種または第三種.

といえば $a_1<a_2$, $b_1<b_2$ であるからである.

(3) m が M に属すれば, $n>m$ である数 n は M に属する. $n=md$ とおけば, $d>1$, $m=a_2b_2$ であるから,

$$n=(a_2b_2)d=a_2(b_2d).$$

b_2d は β の上数であるから b_2' とおけば,

$$n=a_2b_2'.$$

(2) と (3) によれば M は一つの (M によって一意的に定まる) 切断 γ の上組である. (1) より切断 γ は第一種または第三種かつ (2) によって正である.

定義7 γ を α に β を掛けてできた切断または α と β の積といい, $\gamma=\alpha\beta$ と書く.

α および β がともに正の切断のとき, 積 $\alpha\beta$ が定義されたが, α および β がともには正でないときつぎのように定める.

定義8 $\alpha>0^*$, $\beta>0^*$ の場合に,

$$\alpha(-\beta)=-(\alpha\beta),\quad (-\alpha)\beta=-(\alpha\beta),\quad (-\alpha)(-\beta)=\alpha\beta^{1)}.$$

任意の切断 α について,

$$0^*\alpha=0^*,\quad \alpha 0^*=0^*.$$

この二つの定義によれば, $\alpha\beta$ は切断 α,β によって一意的に定まる切断である. 乗法に関する交換, 結合の法則が成立することも明らかである. つぎに配分法則の成立することを証明する.

定理12 $$(\alpha+\beta)\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma.$$

証明 α,β,γ のいずれもが正の場合を証明し, 他は諸君にゆずる[2]. $(\alpha+\beta)\gamma$ の上組と $\alpha\gamma+\beta\gamma$ の上組が一致することを示せばよい.

(1) α,β,γ の上数をそれぞれ a_2,b_2,c_2 で表わせば, $(\alpha+\beta)\gamma$ の上数は $(a_2+b_2)c_2$ の形の数であるから, これを $a_2c_2+b_2c_2$ と書き直すと, a_2c_2 および b_2c_2 は

---

1) $\alpha>0^*$ とすれば $-\alpha<0^*$ である. なぜかといえば

$$0^*=\alpha+(0^*-\alpha)>0^*+(0^*-\alpha)=0^*-\alpha=-\alpha.$$

2) 定義8を利用する.

それぞれ $\alpha\gamma$ および $\beta\gamma$ の上数，したがって $(a_2+b_2)c_2$ は $\alpha\gamma+\beta\gamma$ の上数である．

(2) $\alpha\gamma+\beta\gamma$ の上数は $a_2c_2+b_2c_2'$ の形の数である．ここに a_2, b_2 および c_2, c_2' はそれぞれ α, β および γ の上数とする．

$c_2=c_2'$ のときは

$$a_2c_2+b_2c_2'=(a_2+b_2)c_2 \quad \text{すなわち} (\alpha+\beta)\gamma \text{の上数である．}$$

$c_2<c_2'$ のときは

$$a_2c_2+b_2c_2' > a_2c_2+b_2c_2=(a_2+b_2)c_2.$$

$(a_2+b_2)c_2$ は $(\alpha+\beta)\gamma$ の上数であるから $a_2c_2+b_2c_2'$ もまた上数である．$c_2>c_2'$ のときも同様にやればよい．

定理 13 $$1^*\cdot\alpha=\alpha.$$

証明 (1) $\alpha>0^*$ の場合：1^* の上組は $1+d\,(d>0)$ という有理数からなる．$1^*\cdot\alpha$ の上数は $(1+d)a_2$ の形の数である．

$$(1+d)a_2=a_2+a_2d>a_2 \quad \text{ゆえに} (1+d)a_2 \text{は} \alpha \text{の上数である．}$$

逆に α の上数を a_2 とすれば，a_2 より小なる a_2' が上組にある．$a_2=(1+d)a_2'$ $(d>0)$ とおくことができるから，a_2 は $1^*\cdot\alpha$ の上数である．

(2) $\alpha=0^*$ の場合：$1^*\cdot\alpha=0^*=\alpha$.

(3) $\alpha<0^*$ の場合：$1^*(-\alpha)=-\alpha$. ゆえに $-1^*\cdot\alpha=-\alpha$（定義 8）．ゆえに $1^*\cdot\alpha=\alpha$.

定理 14 $\alpha<\beta$ かつ $\gamma>0^*$ とすれば $\alpha\gamma<\beta\gamma$ である．

証明 $\alpha<\beta$ から

$$0^*=\alpha+(0^*-\alpha)<\beta+(0^*-\alpha).$$

$\gamma>0^*$ であるから

$$0^*<\{\beta+(0^*-\alpha)\}\gamma, \quad \text{ゆえに} \quad \alpha\gamma<\{\beta+(0^*-\alpha)\}\gamma+\alpha\gamma.$$

しかるに

$$\{\beta+(0^*-\alpha)\}\gamma+\alpha\gamma=[\{\beta+(0^*-\alpha)\}+\alpha]\gamma=[\beta+\{(0^*-\alpha)+\alpha\}]\gamma$$
$$=(\beta+0^*)\gamma=\beta\gamma.$$

定理 15 $$a^*b^* = (ab)^*.$$

証明 略す.

定理15によれば,

第一種の切断の乗法は対応する数の乗法に帰着する.

9. 切断の商

切断[1)]

$$\alpha = (A_1, A_2), \qquad \beta = (B_1, B_2)$$

はともに正とする．換言すればαおよびβの下組に正の数があるものとする．代表的にβの正の下数をb_1，αの上数(>0)をa_2で表わし，a_2/b_1の形のすべての数の集合をMとする．Mはつぎの性質を持つ:

(1) Mは最小数を含まない．なぜかといえばA_2には最小数がないからである．

(2) Mは空ではない(明白)．Mに属さない正の数がある．a_1をαの正の下数，b_2をβの上数(>0)とすれば，a_1/b_2はa_2/b_1の形に書けない．なぜかといえば，$a_1<a_2$，$b_1<b_2$であるからである．

(3) mがMに属すれば，$n>m$なる数nはMに属する．

$n=md\,(d>1)$とおくことができるから，$m=a_2/b_1$とすれば

$$n = md = \frac{a_2}{b_1}d = \frac{a_2d}{b_1}.$$

a_2dはαの上数であるからa_2'とおけば

$$n = \frac{a_2'}{b_1}.$$

(2)と(3)からMは一つの(Mによって一意的に定まる)切断γの上組である．切断γは(1)によって第一種か第三種かつ(2)によれば正である．

定義 9 γをαをβで割ってできた切断またはαとβの商といい，$\gamma=\alpha/\beta$と

1) 第一種または第三種.

書く.

α および β がともに正の切断のとき，商 α/β は定義されたが，α および β がともには正でないときつぎのように定める.

定義 10 $\alpha>0^*$, $\beta>0^*$ の場合に，

$$\frac{(-\alpha)}{\beta}=-\frac{\alpha}{\beta},\quad \frac{\alpha}{(-\beta)}=-\frac{\alpha}{\beta},\quad \frac{(-\alpha)}{(-\beta)}=\frac{\alpha}{\beta}.$$

$\alpha\neq 0^*$ のときはつねに

$$\frac{0^*}{\alpha}=0^*.$$

この二つの定義から，α/β は α, β によって一意的に定まる切断である．ただし $\beta\neq 0^*$ とする.

注意 有理数の除法において除数が 0 の割算を例外としたように，切断においても 0^* で割ることは定義しない.

定理 16
$$\beta\cdot\frac{\alpha}{\beta}=\alpha.$$

証明 $\alpha>0^*$, $\beta>0^*$ の場合を証明する．その他の場合は定義 10 を用いればよい．まずつぎのことを証明しておこう.

任意の正の切断において，d を任意に与えられた 1 よりも大なる有理数とすれば，適当に正の下数，上数を選んでその比を d に等しくできる.

a および b をそれぞれ任意の正の下数および上数とし，$ad^n>b$ となるように正の整数 n を定めると[1)]，

$$a,\ ad,\ ad^2,\ \cdots,\ ad^n$$

において，a は下数(>0)，ad^n は上数であるから，相隣る二数で互いに相異なる組に属するものがある．この二数の比は d に等しい.

$\beta\cdot\dfrac{\alpha}{\beta}$ の上数は $b_2\cdot\dfrac{a_2}{b_1}$ の形の数である．ここに b_2 は β の上数，a_2 は α の上数，

1) $d=1+k$ $(k>0)$ とおけば数学的帰納法を用いて容易に $d^n=(1+k)^n\geqq 1+nk$ を証明できる．したがって $ad^n\geqq a(1+nk)>b$ となるように n を定めるとよい.

b_1 は β の正の下数である．$a_2\cdot\frac{b_2}{b_1}>a_2$．ゆえに $b_2\cdot\frac{a_2}{b_1}$ は α の上数である．

逆に α の一つの上数を a_2 とすれば，a_2 よりも小さい上数 a_2' がある．適当に β の正の下数 b_1，上数 b_2 を選んで，$b_2/b_1=a_2/a_2'$ であるようにできるから，$a_2=b_2\cdot\frac{a_2'}{b_1}$ は $\beta\cdot\frac{\alpha}{\beta}$ の上数である．

定理 17
$$\frac{a^*}{b^*}=\left(\frac{a}{b}\right)^*.$$

証明 略す．

第一種の切断の除法は対応する数の除法に帰着する．

10. 実数の定義

おのおのの有理数の切断で一つの新しい数を定義しこれを**実数**と呼ぶことにする．さらに同一の有理数に対応する第一種および第二種の切断が定める実数は同一であると約束する．しばらくの間有理数 a に対応する第一種の切断 a^* を**有理実数**と名付けよう．したがって上の約束によれば a を上組の最小数とする第二種の切断の定める実数をも有理実数というわけである．実際われわれは第一種の切断とそれに対応する有理数の全体の間に大小の順序および四則演算に関してまったく同一の法則が成立し，したがって大小および四則に関する限り有理数の代りに有理実数を使用しても一向さしつかえがないことは特に指摘しておいたつもりである．つぎに第三種の切断には有理数が対応しないからこれを**無理数**ということにしよう．

11. 実数の絶対値

定義 11 実数 α の絶対値 $|\alpha|$ はつぎのように定義する：

$$\alpha>0^* \quad \text{ならば} \quad |\alpha|=\alpha,$$

$$\alpha=0^* \quad \text{ならば} \quad |\alpha|=0,$$

$$\alpha<0^* \quad \text{ならば} \quad |\alpha|=-\alpha.$$

この定義によれば，$|\alpha|$はαが0^*に等しいときを除けばつねに正数である．容易にわかるように

$$\alpha \leqq |\alpha|,\ \ |-\alpha| = |\alpha|,\ \ |\alpha\beta| = |\alpha||\beta|,\ \ \left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}\ \ (\text{ただし } \beta \neq 0^*),$$

$$|\alpha\pm\beta| \leqq |\alpha|+|\beta|, \qquad |\alpha\pm\beta| \geqq |\alpha|-|\beta|.$$

12. 実数の大小

実数の全体は大小の順序のある集合である．換言すれば，

(1) $\alpha \neq \beta$であるときは，$\alpha<\beta$かまたは$\alpha>\beta$である．

(2) $\alpha=\beta$であるときは，$\alpha<\beta$でも$\alpha>\beta$でもない．

(3) $\alpha<\beta$でかつ$\beta<\gamma$であるならば，$\alpha<\gamma$である．

の三つの関係が成立する．ここにα, βおよびγは実数を表わす．

13. 実数の稠密性

第三種の切断，すなわち無理数の少なくとも一つ存在することはすでに述べておいたが，実は無限に多く存在する．αを一つの無理数としてβを任意の有理実数(ただし $\neq 0^*$)とすれば，$\alpha+\beta$および$\alpha\cdot\beta$はいずれも無理数である．なぜかといえば，これを有理実数とすれば

$$\alpha = (\alpha+\beta)-\beta = \frac{\alpha\cdot\beta}{\beta}$$

であるから，αもまた有理実数でなければならない．

定理 18 任意の相異なる二つの実数の間に無限に多くの有理実数が存在する．

証明 実数の定義によればこれは定理 7 の直接の結果である．

定理 19 任意の相異なる二つの実数の間に無限に多くの無理数が存在する．

証明 二つの実数を$\alpha, \beta\,(\alpha<\beta)$とし，無理数の任意の一つを$\gamma$とすれば$\alpha-\gamma<\beta-\gamma$である．定理 18 によれば

$$\alpha-\gamma < r^* < \beta-\gamma$$

であるような無限に多くの有理実数 r^* が存在する．$\gamma+r^*$ はたしかに無理数であって明らかに

$$\alpha < r^*+\gamma < \beta$$

を満足する．

こうして，

任意の相異なる二つの実数の間に無限に多くの有理実数および無理数が存在する． この性質を実数の**稠密性**という．

14. 実数の連続性

任意に一つの実数 α を与えれば，これによって実数の全体をつぎのように二組 $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ に分けることができる．α よりも小であるすべての実数を $\mathfrak{A}_1$ 組に，α よりも大なるすべての実数を $\mathfrak{A}_2$ 組に，α 自身は任意に $\mathfrak{A}_1$ 組かまたは $\mathfrak{A}_2$ 組に属させると，それに相当して α は $\mathfrak{A}_1$ 組における最大数または $\mathfrak{A}_2$ 組における最小数となる．いずれの場合にせよ，$\mathfrak{A}_1$ 組のおのおのの数は $\mathfrak{A}_2$ 組のおのおのの数よりも小である．

今度は実数の全体が，

(1) $\mathfrak{A}_1$ および $\mathfrak{A}_2$ のいずれも空でなく，

(2) $\mathfrak{A}_1$ のおのおのの数は $\mathfrak{A}_2$ のおのおのの数よりも小である

ようになんらかの方法で二組 $\mathfrak{A}_1$ および $\mathfrak{A}_2$ に分けられたとすれば，この組分けを**実数の切断**といってこれを $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ で表わす．

さて実数の切断においても有理数の場合の第三種の切断に相当するものができるであろうか．もしこのような切断ができるとすれば有理数の切断で新しい数(実数)を定義したのと同様にして実数の切断でさらに新しい数を定義することができるはずである．つぎの定理はこの問題に答えるものである．

定理 20 実数の切断においては有理数の場合における第三種に相当するも

のは存在しない．換言すれば，任意に切断$(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$を与えればつぎのような一つしかもただ一つの実数$\alpha$が必ず存在する：$\alpha$よりも小なるおのおのの数は$\mathfrak{A}_1$に属し，$\alpha$よりも大なるおのおのの数は$\mathfrak{A}_2$に属する．

証明 このような数があってもただ一つであることは実数の稠密性から明らかであろう[1]．ゆえに実際このような数の存在を証明すればよい．

実数の切断$(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$によって一つの有理数の切断$(A_1, A_2)$がつぎのように定義される．有理実数$a^*$が$\mathfrak{A}_1$に属するかまたは$\mathfrak{A}_2$に属するかにしたがって有理数$a$を$A_1$組かまたは$A_2$組に属させるとこの有理数の組分けは明らかに有理数の切断(A_1, A_2)を形作る．まず，われわれは切断(A_1, A_2)が第二種でないものと仮定しよう．こうすれば(A_1, A_2)の定める実数αは求めるものであることがつぎのようにしてわかる：

(1) $\beta<\alpha$とすれば，βの上数で同時にαの下数であるような有理数rは無限に多く存在する．このようなrに対応する有理実数r^*は明らかに$\beta<r^*$である．しかるにrはαの下数であるから，rはA_1組に含まれしたがってr^*は$\mathfrak{A}_1$に含まれる．ゆえにr^*よりも小なるβはなおさら$\mathfrak{A}_1$に含まれる．

(2) $\beta>\alpha$とすれば，αの上数で同時にβの下数であるような有理数rが無限に多く存在する．ゆえにこのようなrに対して(たかだかその一つを例外とすれば)必ず$r^*<\beta$($r^*=\beta$の起るのはβが第一種の切断でしかもrが下組の最大数のときに限られる)である．しかるにrはαの上数であるからA_2組に含まれ，したがってr^*は$\mathfrak{A}_2$に含まれる．ゆえにr^*よりも大なるβはなおさら$\mathfrak{A}_2$に属する．

つぎに切断(A_1, A_2)が第二種の切断である場合には上組A_2の最小数aを下組A_1に移して第一種の切断a^*を作り，これをαとおけばやはり上に述べた(1)および(2)が成立することは同様にして証明される．

---

1) このような数が二つあるものとして，これらをα, βとすればαとβの間に他の数γが存在する．このγは$\mathfrak{A}_1$および$\mathfrak{A}_2$の両方に属することになるであろう．

こうして実数αと相異なる実数βは$\beta<\alpha$かまたは$\beta>\alpha$にしたがって$\mathfrak{A}_1$かまたは$\mathfrak{A}_2$に属し，α自身は$\mathfrak{A}_1$の最大数かまたは$\mathfrak{A}_2$の最小数である．

定理20は**実数の切断においては有理数の場合における第三種に相当するものが存在しない，換言すれば実数の切断によっては実質的には実数以外の新しい数を生じない**ことを主張し，この性質は実数のもっとも重要な性質でこれを**実数の連続性**といい，定理20を**連続性の定理**または**デデキントの基本定理**という．

さて有理数の切断とまったく同様に有理実数の切断を定義したとき，

定理20′　有理実数の切断を(A_1^*, A_2^*)とすれば，A_1^*のおのおのの数よりも小でなくまたA_2^*のおのおのの数よりも大でないような実数αは必ず存在してしかもただ一つである．換言すれば，切断(A_1^*, A_2^*)を決定するような実数αが存在する．

証明　集合$\mathfrak{A}_1$はつぎの性質を持つものとする：

(1)　A_1^*のおのおのの数は$\mathfrak{A}_1$に含まれ，かつ

(2)　A_1^*のおのおのの数a_1^*よりも小なるすべての実数は$\mathfrak{A}_1$に属するものとする．

つぎに$\mathfrak{A}_1$以外のすべての実数の集合を$\mathfrak{A}_2$とすれば，組分け$(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$は一つの実数の切断を作る．前定理によれば，この切断を作るような実数αが存在する．αは$\mathfrak{A}_1$のおのおのの数よりも小でなくかつ$\mathfrak{A}_2$のおのおのの数よりも大でない．しかるに明らかにA_1^*は$\mathfrak{A}_1$に含まれかつ$\mathfrak{A}_1$にはA_2^*の数が含まれないからA_2^*は$\mathfrak{A}_2$に含まれる．よってわれわれの主張は正しいことがわかる．

注意　実数の稠密性によれば，このようなαはただ一つである．またαが有理実数であればA_1^*の最大数であるかまたはA_2^*の最小数である．αが無理数ならばA_1^*のおのおのの数よりも大でA_2^*のおのおのの数よりも小である．

ついでながら，今後実数を表わす記号について一言注意しておくことにしよう．これ迄有理数を表わすには文字a, b, c, r等，また有理数の切断（第一種お

よび第三種)を表わすには文字 α, β, γ 等を用い，特に有理数 r に対応する有理実数を表わすには r^* を使用してきた．しかしながら，有理数の切断で新しい数**実数**を定義ししかもその性質が明らかにされた以上今後実数を表わす文字の使用はまったく任意でさしつかえない．特に有理数 r の代りに今後つねに有理実数 r^* を使用することにすれば，有理実数の‘実’という文字はまったく無用であって単に実数の中の有理数といえば十分であろう．したがって当然 r^* の * もこれを節約して単に r で表わしてもさしつかえないことになる．

15. 数 直 線

直線 L 上に任意に二点 O および E を(E は O の右に)選ぶ．点 O および点 E をそれぞれ 0 および 1 に対応させる．m および n を正の整数とし，線分 OE の長さの n 等分を m 倍した長さを求め，O から左および右に，この長さの距離にある二点をしるし，この二点をそれぞれ有理数 $-m/n$ および m/n に対応させる．こうすれば，おのおのの有理数 r には L 上の一つしかもただ一つの点 R が対応する．点 R のことを r の像点または簡単に点 r という．r および r' を有理数としその像をそれぞれ R および R' とすれば，$r'>r$ または $r'<r$ にしたがって，R' は R の右または左にある．

有理数 r の像点 R を**有理点**という．直線 L 上には有理点でないような点が存在する．たとえば OE を一辺とする正方形の対角線の長さに等しく OJ をとれば，J は有理点でない．このような点を**無理点**という．無理点 J は有理点の全体を二組に分ける：

(1)　J の左方にあるすべての有理点を左組に，

(2)　J の右方にあるすべての有理点を右組に

入れると，左組のおのおのの有理点は右組のおのおのの有理点の左にある．

ゆえにおのおのの有理点を，それが像である有理数でおき代えれば，一つの有理数の切断が得られる．この切断の定める実数を α とすれば α は無理数であ

る．なぜかといえば任意の有理点と J の間になお他の有理点が存在し，左組にもっとも右にある有理点なく，右組にもっとも左にある有理点がないからである．

点 J を無理数 α の像とする．こうすれば，直線 L 上のおのおのの点は一つの実数の像である．この数のことを原点 O および単位点 E に関する点の座標という．P_1 と P_2 とが相異なるとき，座標 x_1 および x_2 は相異なりかつ $x_2>x_1$ または $x_2<x_1$ にしたがって P_2 は P_1 の右または P_2 は P_1 の左にある(これは任意の二点の間に有理点が存在することからわかる)．

さておのおのの無理数には，これを座標とする点が存在するであろうか．像を持たないような無理数 α があれば，直線上のすべての点をつぎのように二組に分けることができる：

(1) 座標が α よりも小であるような点を左組に，

(2) 座標が α よりも大であるような点を右組に．

こうすれば，左組のおのおのの点は右組のおのおのの点より左にあって，かつ左組にはもっとも右の点がなくまた右組にはもっとも左の点がない(なぜかといえば実数の稠密性によって二数の間に有理数があるからである)．

そこでわれわれはつぎの仮定を設ける：

このように直線上の点の全体を二組に分けることは不可能である，換言すれば**直線上の点の全体が左組のおのおのの点は右組のおのおのの点よりも左にあるように二組に分けられた場合に，左組にもっとも右の点があるかまたは右組にもっとも左の点がある**．このことを証明することはできない．むしろ直線はこのような点の集りからできているのであると承認するのである．これがデデキントのつかんだ直線の連続性の本体である．これを**直線の連続性の公理**という．

この公理によれば，任意の無理数を与えた場合にそれを座標とする点が存在する．したがってさきの対応によって実数の全体と直線上の点の全体とは一対

一の対応が付けられる．すなわちおのおのの数は直線上に一つの定まれる像を持ち，直線上のおのおのの点は一つの定まれる座標を持つ．

以上の所論によって，実数を直線上の点で表わすことが可能となった．ついでながら数を直線上の点で表わし，数の間の関係を直観的に説明するために使用する直線を**数直線**というのである．

この章を終るに臨んで一言付加しよう．

われわれの数の範囲(領域)を有理数ばかりとすれば，連続量を数で表わすのに不十分であることから(例えば単位の長さを一辺とする正方形の対角線の長さ)新しく数の範囲を拡張する必要が起る．デデキントは連続量(長さ，時間等)の連続性の本体をつかみ，連続性の公理をたてしかる後に有理数の切断で新しい数(無理数)を導き，実数の領域が連続であることを証明したのである．詳細はデデキントの“Stetigkeit und irrationale Zahlen”を読まれたい．

第3章　極限の概念

16. 下限および上限

M を有限または無限な数集合とする．今後数といえばつねに実数を意味する．

定義12　M のいかなる数 x に対しても

$$a \leqq x$$

であるような一つの数 a があるならば，集合 M は**下方に有界**といい，すべてのこのような数 a を M の**下界**という．

同様に M のいかなる数 x に対しても

$$x \leqq b$$

であるような一つの数 b があるならば，集合 M は**上方に有界**といい，すべてのこのような数 b を M の**上界**という．上方下方ともに有界であるとき単に M は**有界**であるという．

a を一つの下界とすれば，a より小なるおのおのの数は明らかに下界である．同様に b を一つの上界とすれば，b より大なるおのおのの数は上界である．

定理21　M を一つの下方に有界な集合とすれば，すべての下界の中に最大数が存在する．最大なる下界を**下限**という．同様に，M を一つの上方に有界な集合とすれば，すべての上界の中に最小数が存在する．最小なる上界を**上限**という．

証明　上限についてもまったく同様であるから，下限について証明しよう．すべての下界の集合を $\mathfrak{A}_1$，残りのすべての数の集合を $\mathfrak{A}_2$ とすれば，この組分けは明らかに一つの実数の切断 $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ を作る．実数の連続性によって，この切断を定義する一つの数 α が存在する．この α は $\mathfrak{A}_1$ の最大数かまたは $\mathfrak{A}_2$ の最

小数である．後の場合の起らないことをいえばよい．α が $\mathfrak{A}_2$ に属すれば下界でないから，$\alpha>x$ である M の一つの数 x がある．実数の稠密性から，$\alpha>\alpha'>x$ である一つの数 α' がある．α' は下界でないから $\mathfrak{A}_2$ に属ししかも α より小である．これは α が $\mathfrak{A}_2$ の最小数ということに矛盾する．

定理 22 一つの数 g が集合 M の下限であるための必要かつ十分な条件は，つぎの (1) と (2) が成立することである：

(1) M のいかなる数 x に対しても

$$g \leqq x,$$

(2) いかに小さい正の数 ε を与えても

$$g+\varepsilon > x$$

であるような M の少なくとも一つの数 x がある．

同様に，

定理 23 一つの数 G が集合 M の上限であるための必要かつ十分な条件はつぎの (1) と (2) が成立することである：

(1) M のいかなる数 x に対しても

$$x \leqq G,$$

(2) いかに小さい正の数 ε を与えても

$$x > G-\varepsilon$$

であるような M の少なくとも一つの数 x がある．

証明 きわめて簡単であるから省略する．

定理 21 は定理 22 および定理 23 における (1) および (2) を満足する g および G の存在を主張しているのである．**定理 21 と連続性の定理，すなわち定理 20 とは同値である．** われわれが実数の領域からただ一つの数を取り去っても定理 21 は成立しない．換言すれば定理 21 が成立すれば，定理 20 も成立する．

定理 24 M の下限 g および上限 G が存在する場合に，$g \leqq G$ である．ただし等号の成立するのは M がただ一つの数より成るときに限られる．

証明 明らかである.

つぎの注意は重要である.

M が最小数または最大数を含むならば，これらの二数はそれぞれ M の下限および上限である．逆に下限および上限が存在してもこれが M には必ずしも属さない.

例 M を $0<x<1$ であるすべての x の集合とすれば，下限および上限はそれぞれ 0 および 1 である．これらはいずれも M には属さない.

17. 最大極限値および最小極限値

自然数(正の整数)のすべてより成る集合を N とし，N のおのおのの要素 n に一つの数 a_n が対応する場合に，

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots$$

の一列を**数列**という．この数列を表わすのに簡単に $\{a_n\}$ または a_n ですることが多い．数列 $\{a_n\}$ のすべての数値 a_n の集合は有限集合であり得る．例えば，すべての n について $a_n=1$ であるときは $\{a_n\}$ は集合としては 1 ばかりから成る．数列 $\{a_n\}$ の上方有界，下方有界，有界等は a_n の数値の集合についていうのである.

定義 13 任意に一つの数列 $\{a_n\}$ が与えられたとする.

I．$\{a_n\}$ が上界を持たない場合は，

$\{a_n\}$ の最大極限値は $+\infty$(プラス無限大)といい，

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n = \infty \tag{1}$$

で表わす.

II．$\{a_n\}$ が上界を持つ場合は，

明らかに $\{a_{n+p}\}$ (n は固定，$p=0, 1, 2, \cdots$) は上界を持ち，定理 21 によれば上限 γ_n が存在する．つぎに数列 $\{\gamma_n\}$ は単調減少，すなわちつぎの不等式を満足することは明らかである.

$$\gamma_1 \geqq \gamma_2 \geqq \cdots \geqq \gamma_n \cdots.$$

II′. $\{\gamma_n\}$ が下界を持たない場合は,

$\{a_n\}$ の最大極限値は $-\infty$ (マイナス無限大) といい,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = -\infty \tag{2}$$

で表わす.

II″. $\{\gamma_n\}$ が下界を持つ場合は, 定理 21 によれば下限 Γ が存在する. この Γ を $\{a_n\}$ の最大極限値といい,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \Gamma \tag{3}$$

で表わす.

例

1. $a_n = n$
2. $a_n = 2n+(-1)^n 3n$

とすれば $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = +\infty.$

3. $a_n = 1-\dfrac{1}{n}$
4. $a_n = \dfrac{1}{2}[1+(-1)^n]$

とすれば $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = 1.$

5. $a_n = -n$
6. $a_n = -2n+(-1)^n n$

とすれば $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = -\infty.$

注意 ∞, $-\infty$ という記号は便宜上のもので本来の数ではない. しかし, これを数と呼ぶことにする. ∞, $-\infty$ でないことを明示するために数のことを‘有限’の数といい, $-\infty <$ 有限数 $< \infty$ という大小を約束する.

定義 13 によれば,

任意の数列 $\{a_n\}$ はつねに ∞ か $-\infty$ かまたは有限な一つしかもただ一つの最大極限値を持つ (存在と一意性).

定理 25 数列 $\{a_n\}$ の最大極限値が $+\infty$ であるための必要かつ十分な条件は, 任意に正数 G を与えた場合に

$$G < a_n$$

を満足する少なくとも一つ(実は無限に多く)の n が存在することである.

証明　$\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n=\infty$ とは $\{a_n\}$ が上界を持たないことであるからである.

注意　n は明らかに G に関係する.

定理26　数列 $\{a_n\}$ の最大極限値が $-\infty$ であるための必要かつ十分な条件は, 任意に正数 G を与えた場合に, 整数 n_0 を適当に選んで, $n\geqq n_0$ であるすべての n に対して

$$a_n < -G$$

が成立するようにできることである.

証明　$\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n=-\infty$ は $\{\gamma_n\}$ が下界を持たないことであるから, 任意に正の数 G を与えた場合に

$$\gamma_n < -G$$

を満足する少なくとも一つの n がある. これを n_0 とすれば, γ_{n_0} は $\{a_{n_0+p}\}$ $(p=0,1,2,\cdots)$ の上限であるから, $p=0,1,2,\cdots$ に対して, $a_{n_0+p}<-G$ である(必要条件).

逆に, $n\geqq n_0$ のすべての n に対して, $a_n<-G$ とすれば, 与えられた数列 $\{a_n\}$ は上方に有界で, かつ $\{a_{n_0+p}\}$ $(p=0,1,2,\cdots)$ は上界 $-G$ を持つから, $\gamma_{n_0}\leqq -G$ である. ゆえに $\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n=-\infty$ である(十分条件).

定理27　数列 $\{a_n\}$ の最大極限値が Γ であるための必要かつ十分な条件は, 任意に小さい正の数 ε を与えた場合に

$$a_n < \Gamma+\varepsilon$$

が十分大きなすべての n で成立し[1], かつ

$$a_n > \Gamma-\varepsilon$$

が無限に多くの n で成立することである.

証明　必要条件. Γ は $\{\gamma_n\}$ の下限であるから, 正の数 ε を任意に与えた場合に

1)　たかだか有限個の n を例外として, その他のすべての n についてという意味である.

$$(1)\qquad \begin{cases} \gamma_n \geqq \Gamma & (\text{すべての } n \text{ について}), \\ \gamma_n < \Gamma+\varepsilon & (\text{少なくとも一つの } n \text{ について}) \end{cases}$$

が成立する．つぎに γ_n は数列 $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots$ の上限であるから，$n=1, 2, \cdots$ のおのおのの n に対して

$$(2)\qquad \begin{cases} a_{n+j} \leqq \gamma_n & (j=0, 1, 2, \cdots \text{ のすべてについて}), \\ a_{n+j} > \gamma_n-\varepsilon & (j=0, 1, 2, \cdots \text{ の中の少なくとも一つについて}) \end{cases}$$

が成立する．いま最後の不等式を満足する j を j_n とすれば，(1)および(2)から

$$(3)\qquad \begin{cases} a_{n+j} < \Gamma+\varepsilon & (\text{少なくとも一つの } n,\ j=0, 1, 2, \cdots \text{ のすべて}), \\ a_{n+j_n} > \Gamma-\varepsilon & (\text{すべての } n). \end{cases}$$

(3)をいい換えれば

$$(4)\qquad \begin{cases} a_m < \Gamma+\varepsilon & (\text{十分大なるすべての } m), \\ a_m > \Gamma-\varepsilon & (\text{無限に多くの } m) \end{cases}$$

である．

十分条件．逆に(4)が成立するならば，つぎの不等式を満足する無限に多くの n がある：

$$a_n > \Gamma-\varepsilon \quad \text{かつ} \quad a_n < \Gamma+\varepsilon,\ a_{n+1} < \Gamma+\varepsilon,\ \cdots.$$

このような n に対しては

$$(5)\qquad \gamma_n > \Gamma-\varepsilon,$$

かつ

$$(6)\qquad \gamma_n \leqq \Gamma+\varepsilon.$$

さて $\{\gamma_n\}$ は単調減少であるから(5)は結局すべての n で成立する．仮に $n=n_0$ で成立しないとすれば，$n \geqq n_0$ のすべての n に対して $\gamma_n \leqq \Gamma-\varepsilon$ が成立することになり，これは(5)を満足する n が無限に多くあることに反する．したがって $\Gamma-\varepsilon$ は $\{\gamma_n\}$ の一つの下界である．ゆえに $\{\gamma_n\}$ の下限を λ とすれば，$\lambda \geqq \Gamma-\varepsilon$ である．しかるに ε は任意の正の数であるから $\lambda \geqq \Gamma$ となる．他方において(6)より $\lambda \leqq \Gamma+\varepsilon$ したがって $\lambda \leqq \Gamma$ である．ゆえに $\lambda=\Gamma$.

最大極限値とまったく平行に最小極限値はつぎのように定義される.

定義 14　任意に一つの数列 $\{a_n\}$ が与えられたとする.

I. $\{a_n\}$ が下界を持たない場合は,

$\{a_n\}$ の最小極限値は $-\infty$ といい,

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n = -\infty \tag{1}$$

で表わす.

II. $\{a_n\}$ が下界を持つ場合は,

明らかに $\{a_{n+p}\}$ (n は固定, $p=0,1,2,\cdots$) は下界を持ち, 定理 21 によれば下限 δ_n が存在する. つぎに数列 $\{\delta_n\}$ は単調増加, すなわちつぎの不等式を満足することは明らかである.

$$\delta_1 \leqq \delta_2 \leqq \cdots \leqq \delta_n \cdots.$$

II$'$. $\{\delta_n\}$ が上界を持たない場合は,

$\{a_n\}$ の最小極限値は ∞ といい,

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n = \infty \tag{2}$$

で表わす.

II$''$. $\{\delta_n\}$ が上界を持つ場合は, 定理 21 によれば上限 Δ が存在する. この Δ を $\{a_n\}$ の最小極限値といい,

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n = \Delta \tag{3}$$

で表わす.

定義 14 によれば, 最大極限値と同様に,

任意の数列 $\{a_n\}$ はつねに $-\infty$ か ∞ かまたは有限な一つしかもただ一つの最小極限値を持つ(存在と一意性).

最大極限値と同様につぎの諸定理が成立する. 証明は最大極限値の場合と同様であるから省略する.

定理 28　数列 $\{a_n\}$ の最小極限値が $-\infty$ であるための必要かつ十分な条件は,

任意に正数 G を与えた場合に

$$a_n < -G$$

を満足する少なくとも一つ(実は無限に多く)の n が存在することである.

定理 29　数列 $\{a_n\}$ の最小極限値が ∞ であるための必要かつ十分な条件は，任意に正数 G を与えた場合に，十分大きなすべての n に対して

$$a_n > G$$

が成立することである.

定理 30　数列 $\{a_n\}$ の最小極限値が $\varDelta$ であるための必要かつ十分な条件は，任意に小さい正の数 ε を与えた場合に

$$a_n > \varDelta - \varepsilon$$

が十分大きなすべての n で成立し，かつ

$$a_n < \varDelta + \varepsilon$$

が無限に多くの n で成立することである.

われわれの定義(13-14)から直接に，任意の数列に対してその最大および最小極限値の存在と一意性が出る．定理 25-30 によれば，われわれの定義をそれらの条件でおき代えることができる[1]．これをまったく逆に最初に最大および最小極限値を定理 25-30 の条件で定義すれば，その存在と一意性は直接には出ない．これを証明することは結局は定義 13-14 と同値であることを示すことに帰着する.

つぎにきわめて容易な二, 三の定理を述べる.

定理 31　数列 $\{a_n\}$ の最大極限値は最小極限値より小でない.

証明　$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \infty$ または $\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = -\infty$ であるときは明らかである．そうでない場合，すなわち $\{a_n\}$ が有界であるときは γ_n および δ_n が存在し $\gamma_n \geqq \delta_n$ である．$\{\gamma_n\}$ および $\{\delta_n\}$ はそれぞれ単調減少および単調増加であるから

$$\delta_1 \leqq \delta_2 \leqq \cdots \leqq \delta_n \leqq \cdots \leqq \gamma_n \leqq \cdots \leqq \gamma_2 \leqq \gamma_1.$$

1)　応用上にはこの方が便利である.

$\{\delta_n\}$の上限および$\{\gamma_n\}$の下限をそれぞれΔおよびΓとすれば，まずすべてのnについて$\Delta \leqq \gamma_n$，Δは$\{\gamma_n\}$の一つの下界であるから$\Delta \leqq \Gamma$.

定理 32　数列$\{a_n\}$において，$n \geqq n_0$（n_0は任意の整数）であるすべてのnについて$a_n = a$とすれば，$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = a$.

証明　$\gamma_n = \delta_n = a \ (n \geqq n_0)$.

定理 33　$n \geqq n_0$（n_0は任意の整数）のすべてのnに対して$a_n' \leqq a_n$とすれば，$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n' \leqq \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n$かつ$\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n' \leqq \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n$.

証明　最大極限値について証明すれば十分であろう.

(1)　$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \infty$の場合は明らかである.

(2)　$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n \neq \infty$の場合は，$n \geqq n_0$のおのおのの$n$について数列$a_n, a_{n+1}, \cdots$は上界を持ち，したがって数列$a_n', a_{n+1}', \cdots$もまた上界を持つ．仮定によれば，前者の上限は後者の上界であるから，おのおのの上限をそれぞれγ_nおよびγ_n'とすれば

$$\gamma_n' \leqq \gamma_n \qquad (n \geqq n_0 \text{ のすべての } n).$$

(2′)　$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n' = -\infty$の場合は明らかである.

(2″)　$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n' \neq -\infty$の場合は，数列$\gamma_1', \gamma_2', \cdots$の下限を$\Gamma'$とおけば

$$\Gamma' \leqq \gamma_n' \qquad (\text{すべての } n),$$

$$\gamma_n' \leqq \gamma_n \qquad (n \geqq n_0 \text{ のすべての } n).$$

ゆえに

$$\Gamma' \leqq \gamma_n \qquad (n \geqq n_0 \text{ のすべての } n).$$

しかるに$\{\gamma_n\}$は単調減少であるから

$$\Gamma' \leqq \gamma_n \qquad (\text{すべての } n).$$

Γ'は数列$\gamma_1, \gamma_2, \cdots$の下界であるから，この下限を$\Gamma$とおけば，$\Gamma' \leqq \Gamma$である.

こうしてすべての場合に定理は証明された.

注意　一つの数列$\{a_n\}$から有限個の要素を取り去ってもまた加えても最大および最小極限値には変りはない.

18. 極限値

一つの数列 $\{a_n\}$ が与えられたとき，定理31によれば，$\varliminf_{n\to\infty} a_n \leqq \varlimsup_{n\to\infty} a_n$ で一般には $\varliminf_{n\to\infty} a_n < \varlimsup_{n\to\infty} a_n$ である．しかし $\varliminf_{n\to\infty} a_n = \varlimsup_{n\to\infty} a_n$ であるような数列がある．

例　$a_n=(-1)^n$ とすれば $\varlimsup_{n\to\infty} a_n=1$，$\varliminf_{n\to\infty} a_n=-1$.

$a_n=\dfrac{n+1}{n}$ とすれば $\varlimsup_{n\to\infty} a_n=\varliminf_{n\to\infty} a_n=1$.

定義 15　$\varliminf_{n\to\infty} a_n=\varlimsup_{n\to\infty} a_n$ であるとき，この共通な値を $\{a_n\}$ の極限値といい，$\lim_{n\to\infty} a_n$ で表わす．

定理 25-30 からただちにつぎの定理が得られる．

定理 34　$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$ であるための必要かつ十分な条件は，任意に正数 G を与えた場合に十分大きなすべての n に対して $a_n>G$ が成立することである．

定理 35　$\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty$ であるための必要かつ十分な条件は，任意に正数 G を与えた場合に十分大きなすべての n に対して $a_n<-G$ が成立することである．

定理 36　$\lim_{n\to\infty} a_n=\lambda$ であるための必要かつ十分な条件は，

任意に正数 ε を与えた場合に十分大きなすべての n に対して

$$\lambda-\varepsilon < a_n < \lambda+\varepsilon$$

が成立することである．

例　(1)　$\lim_{n\to\infty}(n^2+n)=\infty$．なぜかといえば $n^2+n>G$ が十分大きなすべての n で成立する．例えば $n>G$ と取ればよい．

(2)　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{-n^2-n}{2}=-\infty$ も同様にすればよい．

(3)　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\dfrac{1}{2}$．なぜかといえば $\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\dfrac{n+1}{2n}$.

$\left|\dfrac{n+1}{2n}-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2n}<\varepsilon$ であるためには $n>\dfrac{1}{2\varepsilon}$ と取ればよい．

(4)　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1+(-1)^n}{2}$ は存在しない．なぜかといえば $\varliminf_{n\to\infty}\dfrac{1+(-1)^n}{2}=0$,

$\varlimsup_{n\to\infty}\dfrac{1+(-1)^n}{2}=1$.

極限値の概念は数学全般においてきわめて重要な役割を持つ．その重要性は最大および最小極限値の概念の比ではない．ゆえに初等的には定理34-36の条件でそれぞれ極限値 ∞, $-\infty$, λ(有限数) を定義する．ただしこの場合には極限値 ∞, $-\infty$, λ が両立しないことおよび有限な極限値にあっては一意性を証明しなければならない．

つぎの諸定理は演習問題として証明は諸君にゆずる．いずれも重要な定理である．

定理 37 数列 $\{a_n\}$ が一つの (有限または無限大の) 極限値を持つとき，その任意の部分数列(たとえば $a_1, a_3, a_5, \cdots$) も同じ極限値を持つ．

定理 38 n_0 を任意の整数とし，$n \geqq n_0$ のすべての n について $a_n \geqq b_n$ である場合に，数列 $\{a_n\}$ および $\{b_n\}$ がともに極限値(∞, $-\infty$ をも含む)を持つならば，$\lim_{n\to\infty} a_n \geqq \lim_{n\to\infty} b_n$ である．ここに最初の仮定を $a_n > b_n$ としても $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ であり得ることに注意しなければならない．

例 $a_n = 1+\dfrac{1}{n}$, $b_n = 1-\dfrac{1}{n}$ とすれば $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 1$.

定理 39 十分大きなすべての n で $a_n \leqq \gamma_n \leqq b_n$ とし，$\lim_{n\to\infty} a_n$ および $\lim_{n\to\infty} b_n$ が存在して λ に等しいとすれば(∞, $-\infty$ をも含む)，$\lim_{n\to\infty} \gamma_n$ も存在してかつ λ に等しい．

なぜかといえば $\lambda = \lim_{n\to\infty} a_n \leqq \varliminf_{n\to\infty} \gamma_n \leqq \varlimsup_{n\to\infty} \gamma_n \leqq \lim_{n\to\infty} b_n = \lambda$.

定理 40

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n)(\lim_{n\to\infty} b_n),$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}.$$

ただし $\lim_{n\to\infty} a_n$, $\lim_{n\to\infty} b_n$ はともに存在してかつ有限とし，最後の場合はさらに $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$ とする．これに反して左辺は極限値の存在を仮定していない．

19. 収束数列

定義 16　一つの与えられたる数列 $\{a_n\}$ が有限な極限値を持つ場合に，$\{a_n\}$ を収束数列，または $\{a_n\}$ は収束するという．

一つの与えられたる数列 $\{a_n\}$ が収束するか否かを判定するつぎの重要な定理がある．

定理 41　一つの数列 $\{a_n\}$ が収束するための必要かつ十分な条件は，

正の数 ε を任意に与えた場合に $m \geqq n_0$ および $n \geqq n_0$ であるすべての m, n に対して

$$|a_m - a_n| < \varepsilon$$

が成立するように一つの整数 n_0 を選び得ることである[1]．

証明　必要条件：$\{a_n\}$ が有限な極限値 λ を持つとすれば，正の数 ε を任意に与えた場合に適当に整数 n_0 を選んで，$n \geqq n_0$ のすべての n に対して

$$|a_n - \lambda| < \frac{\varepsilon}{2}$$

を満足するようにできる．このような n_0 に対しては

$$|a_m - a_n| = |a_m - \lambda| + |a_n - \lambda| < \varepsilon \qquad (m \geqq n_0,\ \ n \geqq n_0).$$

十分条件：逆に $\{a_n\}$ が定理の条件を満足するとすれば，$n \geqq n_0$ のすべての n に対して

$$|a_n - a_{n_0}| < \varepsilon,$$

したがって

$$|a_n| < |a_{n_0}| + \varepsilon \qquad (n = n_0 + 1, n_0 + 2, \cdots).$$

$|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_{n_0-1}|, |a_{n_0}| + \varepsilon$ の最大を M とすれば

$$|a_n| \leqq M \qquad (n = 1, 2, \cdots).$$

すなわち数列 $\{a_n\}$ は有界である．ゆえに有限な最大および最小極限値が存在する．これらをそれぞれ Γ および Δ とすれば，

1)　普通これをコーシー(A. L. Cauchy)の定理と呼んでいる．

$$\Gamma-\varepsilon < a_m \quad \text{および} \quad \varDelta+\varepsilon > a_n$$

を満足する m および n は無限に多くある．特に $m\geqq n_0$，$n\geqq n_0$ である m, n に対しては

$$\Gamma-\varDelta-2\varepsilon < a_m-a_n \leqq |a_m-a_n| < \varepsilon,$$

したがって $\Gamma-\varDelta<3\varepsilon$ である．ε は正の数である限り任意でよいから

$$\Gamma \leqq \varDelta.$$

他方において，定理31によれば $\Gamma\geqq\varDelta$ であるから，結局

$$\Gamma = \varDelta.$$

定理41はつぎの形に述べることができる．

定理41′　一つの数列 $\{a_n\}$ が収束するための必要かつ十分な条件は，

正の数 ε を任意に与えたとき $m=1, 2, \cdots$ に対して

$$|a_{n_0}-a_{n_0+m}| < \varepsilon$$

が成立するように一つの整数 n_0 を定め得ることである．

証明　両定理における条件の同値であることを示せばよい．定理41の条件から定理41′の条件が出ることは明らかであるから，その逆を示そう．定理41′の条件が満足されるとすれば，正の数 ε を任意に与えた場合に $m=1, 2, \cdots$ に対して

$$|a_{n_0}-a_{n_0+m}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

であるように n_0 を定めることができる．この n_0 に対しては

$$|a_{n_0+m}-a_{n_0+m'}| \leqq |a_{n_0}-a_{n_0+m}|+|a_{n_0}-a_{n_0+m'}| < \varepsilon.$$

ここに m および m' は任意の自然数とする．ゆえに定理41の条件が満足される．

つぎの二定理は収束するための十分条件を与える．

定理42　数列 $\{a_n\}$ が単調増加，すなわち

$$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \cdots$$

であるとき，これが上界を持つならば，$\{a_n\}$ は収束してかつその極限値は $\{a_n\}$ の上限に等しい.

証明 まずこの数列が収束することを証明する．仮に収束しないとすれば(定理41′の条件を満足しないから)，一つの正の数 ε と自然数の増加数列 $n_1, n_2, n_3, \cdots$ があって

$$|a_{n_2}-a_{n_1}| \geqq \varepsilon,\quad |a_{n_3}-a_{n_2}| \geqq \varepsilon,\quad \cdots$$

が成立する．しかるに $a_{n_2}-a_{n_1}$, $a_{n_3}-a_{n_2}$, $\cdots$ は正であるから $a_{n_{r+1}} \geqq a_{n_1}+r\varepsilon$ である．r を十分大きくとれば，$a_{n_{r+1}}$ は一つの上界よりも大きくなるから不都合である.

こうして $\{a_n\}$ は有限な極限値を持つことがわかる．つぎにこれが $\{a_n\}$ の上限 G に等しいことを証明する．定理23によれば,

$$a_n \leqq G \qquad (\text{すべての } n),$$

$$a_n > G-\varepsilon \qquad (\text{少なくとも一つの } n,\ \text{例えば } n_0)$$

が成立する．$\{a_n\}$ は単調に増加するから最後の不等式は $n \geqq n_0$ であるすべての n で成立し，したがって

$$G-\varepsilon < a_n \leqq G \qquad (n \geqq n_0 \text{ であるすべての } n).$$

ゆえに $\lim_{n\to\infty} a_n = G$ (定理36).

定理43 数列 $\{a_n\}$ が単調減少，すなわち

$$a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 \geqq \cdots$$

であるとき，これが下界を持つならば，$\{a_n\}$ は収束してかつその極限値は $\{a_n\}$ の下限に等しい.

証明 定理42とまったく同様である.

定理44 いかなる(有理および無理)数も一つの有理数列の極限値と考えられる.

証明 α を一つの実数とする．n を任意の正の整数とすれば，α と $\alpha+(1/n)$ の間に少なくとも一つの有理数 a_n が存在するから $|a_n-\alpha|<(1/n)$，したがっ

て $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$.

最後に級数について一言しておくことにしよう.

一つの数列 $a_1, a_2, \cdots$ が与えられたとき

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \qquad (n=1, 2, \cdots)$$

とおき，数列 $\{s_n\}$ が収束する，すなわち一つの有限な極限値 λ を持つ場合には無限級数

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

は収束するといい，λ をこの級数の和という．普通

$$\lambda = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

で表わす．無限級数 $a_1 + a_2 + \cdots$ を簡単に $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ で表わすことが多い．なお s_n のことを級数の n 番目の部分和という.

ここに級数の定義であるが級数 $a_1 + a_2 + \cdots$ というのは $a_1, a_2, \cdots$ を順次に無限に加えた和という意味ではない，単にその部分和の数列 $\{s_n\}$ と同意義である.

第4章　ベキ，対数，小数

20. 整指数のベキ

任意の底を持つ整指数のベキがつぎの四つの公式で定義されることは諸君のよく承知される所であろう．

A.　$$a^1 = a.$$

B.　$$n = 2, 3, \cdots \quad \text{に対して} \quad a^n = a\cdot a\cdots a.$$

ここに右辺の因数の数は n とする．

C.　$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad (n=1, 2, \cdots,\ \ a \neq 0).$$

D.　$$a^0 = 1 \qquad (a \neq 0).$$

A-D の公式から任意の整指数の場合に容易につぎの法則が出てくる：

Ⅰ．$a^n a^m = a^{n+m}$.

Ⅱ．$\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.

Ⅲ．$(a^n)^m = a^{nm}$.

Ⅳ．$a^n b^n = (ab)^n$.

Ⅴ．$\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$.

Ⅵ．$1^n = 1$.

Ⅶ．$0<a<b$ であるとき，$n>0$ であるならば

$0<a^n<b^n$.

ただしⅠ-Ⅴの法則においては $a \neq 0$，$b \neq 0$ とする．換言すれば，両辺はともに意味を持つものとする．

定理 45　(乗根の存在定理) a を一つの正の数，n を一つの正の整数とすれば

$$\xi^n = a$$

を満足する一つしかも唯一の正の数 ξ が存在する．ξ を a の n 乗根といい，$\xi = \sqrt[n]{a}$ で表わす．ただし $\sqrt[2]{a}$ は単に $\sqrt{a}$ と書く．

証明　$n=1$ の場合は明らかである．$n>1$ の場合にこのような ξ が存在するとしてもただ一つである．なぜかといえば，$0<\xi_1<\xi_2$ とすればⅦによって

$\xi_1{}^n<\xi_2{}^n$ であるからである．

つぎに存在を証明する．数列 $1^n, 2^n, 3^n, \cdots$ は明らかに極限値 ∞ を持つから，$x^n>a$ であるような一つの正の数 x がある．M をこのようなすべての正の数 x の集合とし，その下限を ξ とする．他方において数列 $1^n, (1/2)^n, (1/3)^n, \cdots$ は極限値0を持つから $g^n<a$ であるような一つの正の数 g が存在する．g は M のおのおのの数 x よりも小であるから M の下限である ξ は g よりも小ではない，したがって正の数である．この ξ が求めるものである．それには $\xi^n \neq a$ とすれば，不合理が起ることを示せばよい．$\xi^n>a$ とすれば十分大きな整数 ν に対しては

$$\xi-\frac{1}{\nu}>0 \quad かつ \quad \left(\xi-\frac{1}{\nu}\right)^n>a \quad \left(なぜかといえば \lim_{\nu\to\infty}\left(\xi-\frac{1}{\nu}\right)^n=\xi^n\right).$$

したがって $\xi-(1/\nu)$ は M に属するから $\xi \leqq \xi-(1/\nu)$ でなければならない．これは不合理である．同様に $\xi^n<a$ とすれば，十分大きな整数 ν に対して $\left(\xi+\dfrac{1}{\nu}\right)^n$ $<a$ であることから，$\xi+(1/\nu)$ は M の一つの下界である．ゆえに $\xi+(1/\nu)\leqq\xi$. これは不合理である．

注意　有理数の n 乗根は一般に無理数である．

注意　$n=2, 3, \cdots$ かつ $1+d>0$ とすれば

$$\sqrt[n]{1+d} \leqq 1+\frac{d}{n},$$

ここに等号が成立するのは $d=0$ の場合に限られる(証明は簡単であるから略す).

21. 有理指数のベキ

今後底はつねに**正数**とする．指数が整数でない場合に，ベキの概念を拡張するには，拡張されたベキにおいても法則Ⅰ-Ⅶが保存されるように期待する．

ν が有理数の場合に記号 a^ν $(a>0)$ にⅠ-Ⅶが成立すると仮定すれば，a^ν はいかなる意味を持たなければならないだろうか．任意の有理数 ν は p を整数，q

を正の整数とし，p/q と書くことができる．

$a^{p/q}$ に III が成立するから

$$(a^{p/q})^q = a^p$$

である．$a^{p/q}$ は 0 に等しくはない．なぜかといえば $0^q=0\neq a^p\,(a>0)$．ふたたび III によれば，$a^{p/q}$ は $a^{p/2q}$ の二乗でかつ $a^{p/2q}\neq 0$ であるから $a^{p/q}$ は正である．ゆえに $a^{p/q}$ はその q 乗が a^p に等しい一つの正の数でなければならない．乗根の存在定理によると，このような数はちょうど一つ存在する．

こうして I-VII 保存の要求は必然的につぎの定義へ導く．

定義 17 $$a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} \quad ただし \quad a > 0.$$

さて一つの有理数 ν は p/q という形に幾通りにも表わされ，それに応じて上述の定義によれば，a^ν の値はいくつも出てくるのではないかという心配がある．つぎにこの心配がないことを証明しよう．$p/q=p'/q'\ (q>0,\ q'>0)$ とする．定義によれば $a^{p/q}=\sqrt[q]{a^p}$, $a^{p'/q'}=\sqrt[q']{a^{p'}}$ である．$p=p'=0$ の場合は両者が等しいことは明らかである．なぜかといえば両者ともに 1．そうでない場合は $\sqrt[q]{a^p}=\xi$, $\sqrt[q']{a^{p'}}=\eta$ とおけばそれぞれ $\xi^q=a^p$, $\eta^{q'}=a^{p'}$ である．ゆえに

$$\xi^{qp'} = (\xi^q)^{p'} = (a^p)^{p'} = a^{pp'} = (a^{p'})^p = (\eta^{q'})^p = \eta^{q'p}.$$

しかるに $p/q=p'/q'$ であるから $q'p=qp'$，したがって $\xi^{qp'}=\eta^{qp'}$ である．正数 ξ および η はその qp' 乗が等しいから，$\xi=\eta$ でなければならない．たとえば $\xi<\eta$ とすれば，$qp'>0$ の場合は $\xi^{qp'}<\eta^{qp'}$，$qp'<0$ の場合は $\xi^{-qp'}<\eta^{-qp'}$，したがって，$\eta^{qp'}<\xi^{qp'}$ であるからである．

有理指数のベキに関して I-VII が成立することは，容易に証明できる．

例 III．$(a^{p/q})^{r/s}=a^{p/q\cdot r/s}$ を証明する．

$a^{p/q}=\xi$, $(a^{p/q})^{r/s}=\xi^{r/s}=\eta$, $a^{p/q\cdot r/s}=a^{pr/qs}=\zeta$ とおいて，$\eta=\zeta$ を示すとよい．$\xi^q=a^p$, $\eta^s=\xi^r$, $\zeta^{qs}=a^{pr}$ であるから

$$\eta^{sq} = (\eta^s)^q = (\xi^r)^q = \xi^{rq} = (\xi^q)^r = (a^p)^r = a^{pr} = \zeta^{qs}.$$

ゆえに

$$\eta^{qs}=\zeta^{qs}.$$

ゆえに

$$\eta=\zeta.$$

22. 無理指数のベキ[1]

無理指数のベキを定義するにさきだち，つぎの二つの補助定理を述べよう．

A. 一つの有理数列 $x_1, x_2, \cdots$ が収束すれば，数列 $a^{x_1}, a^{x_2}, \cdots (a>0)$ もまた収束する．

B. 二つの有理数列 $\{x_n\}$ および $\{y_n\}$ がともに収束してかつ $\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty} y_n$ とすれば $\lim_{n\to\infty} a^{x_n}=\lim_{n\to\infty} a^{y_n}$ である．

$a=1$ の場合は A, B ともに真である．なぜかといえば $1^{x_n}=1$.

(1) $a>1$ である場合：a^x は x とともに増加する．なぜかといえば $x>y$ (x, y はともに有理数) より $x-y>0$ であるから，法則 VII と VI によれば

$$a^{x-y}>1^{x-y}=1, \text{ したがって } a^x=a^y\cdot a^{x-y}>a^y\cdot 1=a^y.$$

q を任意の正の整数とすれば，$\{x_n\}$ は収束するから，適当に整数 n_0 を定めて，$n\geqq n_0$, $m\geqq n_0$ のすべての m, n に対して

$$-\frac{1}{q}<x_m-x_n<\frac{1}{q}$$

が成立するようにできる．

a^x は単調に増加するから

$$a^{-1/q}<a^{x_m-x_n}<a^{1/q}$$

である．$a=1+d\ (d>0)$ とおけば

$$a^{1/q}=\sqrt[q]{a}=\sqrt[q]{1+d}<1+\frac{d}{q},$$

したがって

$$a^{-1/q}=\frac{1}{a^{1/q}}>\frac{1}{1+(d/q)}>1-\frac{d}{q}.$$

1) 底は正数とする．

ゆえに

$$1-\frac{d}{q} < a^{x_m-x_n} < 1+\frac{d}{q} \quad \text{または} \quad |a^{x_m-x_n}-1| < \frac{a-1}{q}.$$

$\{x_n\}$ は収束するから必ず有界，いまその上界の一つである有理数を G とすれば $x_n \leqq G$，したがって $a^{x_n} \leqq a^G$ であるから

$$|a^{x_m}-a^{x_n}| = |a^{x_n}\cdot a^{x_m-x_n}-a^{x_n}| = a^{x_n}|a^{x_m-x_n}-1| < a^G\frac{a-1}{q}.$$

a, G はともに固定した数で q は任意の正の整数であるから $\{a^{x_n}\}$ は収束する（定理41による).

(2) $0<a<1$ である場合：$a=1/b$ とおけば $b>1$ である.

数列 $\{-x_n\}$ はいうまでもなく収束するから(1)によれば $\{b^{-x_n}\}$ もまた収束する．しかるに

$$b^{-x_n} = b^{0-x_n} = \frac{b^0}{b^{x_n}} = \frac{1}{b^{x_n}} = \frac{1^{x_n}}{b^{x_n}} = \left(\frac{1}{b}\right)^{x_n} = a^{x_n}$$

であるから $\{a^{x_n}\}$ は収束する．こうして A は完全に証明された.

B の仮定のもとに

$$x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2,\ x_3,\ y_3,\ \cdots$$

は収束する．ゆえに A によれば

$$a^{x_1},\ a^{y_1},\ a^{x_2},\ a^{y_2},\ a^{x_3},\ a^{y_3},\ \cdots$$

も収束する．定理37によれば，いかなる部分数列も同一の極限値を持つから，特に

$$a^{x_1},\ a^{x_2},\ \cdots \quad \text{および} \quad a^{y_1},\ a^{y_2},\ \cdots$$

は同じ有限な極限値を持つ．これで B も証明されたわけである.

特に，$x_1, x_2, \cdots$ が有理数の極限値 x を持つ場合には，

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots \quad \text{および} \quad x,\ x,\ x,\ \cdots$$

は共通の極限値 x を持つ．B によれば

$$a^{x_1},\ a^{x_2},\ a^{x_3},\ \cdots \quad \text{および} \quad a^{x},\ a^{x},\ a^{x},\ \cdots$$

についても同様である．ゆえに $\lim_{n\to\infty} a^{x_n}=a^x$ である．

こうして $\lim_{n\to\infty} x_n=x$ (x 有理数) とすれば $\lim_{n\to\infty} a^{x_n}=a^x$ であることがわかる．定理 44 によれば任意の無理数 x は一つの有理数列 $\{x_n\}$ の極限値である．無理数 x を極限値とする収束有理数列はただ一つではないが，おのおのについて $\{a^{x_n}\}$ は同一の極限値を持つ (B による)．この極限値を a^x で表わす．

・こうして正の数を底とするベキは無理数を指数とする場合にも一意的に定義された．

定義 18
$$a^x=\lim_{n\to\infty} a^{x_n} \qquad (a>0).$$

ここに x_n は有理数，$x=\lim_{n\to\infty} x_n$ は有理または無理数とする．

無理指数の場合においてもベキは正である．$\lim_{n\to\infty} x_n=x$ (x_n は有理数) であるから $\{x_n\}$ は有界，ゆえに

$$g<x_n<G.$$

ここに g と G は有理数とする．$a>1$ の場合は $a^{x_n}>a^g$ より，$a^x\geqq a^g>0$．$a<1$ の場合は $1/a>1$，ゆえに $(1/a)^{-x_n}>(1/a)^{-G}$，または $a^{x_n}>a^G$，したがって $a^x\geqq a^G>0$.

最後に $a=1$ の場合は $a^{x_n}=1^{x_n}=1$．ゆえに $a^x=1>0$.

任意の指数の場合に法則 I-VII が成立する．ただし底は正とする．

I．$x=\lim_{n\to\infty} x_n$，$y=\lim_{n\to\infty} y_n$ (x_n, y_n は有理数) とすれば，

$a^{x_n}\cdot a^{y_n}=a^{x_n+y_n}$ であるから，その極限をとれば $a^x\cdot a^y=a^{x+y}$ である．II は I よりすぐ出る．III は次節にゆずる．IV は I とまったく同様に証明できる．V は IV からすぐ出る．VI は明らかである．VII を証明する．$0<a<b$，$x>0$ とする．x_n を有理数とし，$x=\lim_{n\to\infty} x_n$ とする．n を十分大きくとれば $|x-x_n|<x/2$ となるから，

$$x_n=x-(x-x_n)\geqq x-|x-x_n|>x-\frac{x}{2}=\frac{x}{2}.$$

r を 0 と $x/2$ の間にある一つの有理数とすれば，n を十分大きくとるとき，$x_n>$

$r>0$, したがって $a^{x_n-r}<b^{x_n-r}$ である. この両辺の極限をとれば $a^{x-r}\leqq b^{x-r}$ である. 他方において $a^r<b^r$ であるから I を応用すれば $a^x<b^x$ である.

23. 一般のベキに関する定理

定理 46 $a>1$ ならば a^x は x とともに増加する. $a<1$ ならば a^x は x の増加につれて減少する.

証明 $a>1$ の場合を証明すれば十分である. なぜかといえば $a<1$ の場合は $a=1/b$ とおけば上の場合になるからである. $x>y$ とすれば $x-y>0$ であるから法則 VII と VI によって

$$a^{x-y}>1^{x-y}=1.$$

I を応用すれば,

$$a^x=a^y\cdot a^{x-y}>a^y\cdot 1=a^y.$$

定理 47 $a>0$ ならば x^a は x とともに増加する. $a<0$ ならば x^a は x の増加につれて減少する.

証明 $a>0$ の場合はこの定理は VII に他ならない. $a<0$ の場合は $b=-a$ とおけば上の場合になる.

定理 48 $\{x_n\}$ が収束してかつ $\lim_{n\to\infty}x_n=x$ であるときは, $\{a^{x_n}\}$ も収束してかつ $\lim_{n\to\infty}a^{x_n}=a^x$ である.

注意 $\{x_n\}$ が有理数列の場合はすでに述べておいた.

証明 (1) $a=1$ の場合: 明らかである.

(2) $a>1$ の場合: q を任意に大きい正の整数とすれば, 十分大きなすべての n に対して

$$-\frac{1}{q}<x_n-x<\frac{1}{q}$$

が成立するから

$$a^{-1/q}<a^{x_n-x}<a^{1/q} \qquad (\text{定理 46}).$$

$a=1+d\,(d>0)$ とおけば

$$|a^{x_n-x}-1|<\frac{d}{q}=\frac{a-1}{q},\ \text{したがって}\ \lim_{n\to\infty}a^{x_n-x}=1.$$

ゆえに

$$\lim_{n\to\infty}a^{x_n}=\lim_{n\to\infty}(a^x\cdot a^{x_n-x})=a^x\cdot\lim_{n\to\infty}a^{x_n-x}=a^x\cdot 1=a^x.$$

(3)　$a<1$ の場合：$a=1/b$ とおけば (2) の場合になる．

ここで法則 III が成立することを証明する：$(a^x)^y=a^{xy}$.

(1)　$y=0$ の場合：明らかである．

(2)　y が正の有理数の場合：

$$y=\frac{p}{q},\qquad (a^x)^{p/q}=\xi,\qquad a^{xp/q}=\eta$$

とおいて，$\xi=\eta$ を証明すればよい．

$$\xi^q=(a^x)^p=\underbrace{a^x\cdot a^x\cdots a^x}_{p\text{個}}=a^{x+x+\cdots+x}=a^{xp},$$

他方において

$$\eta^q=(a^{xp/q})^q=\underbrace{a^{xp/q}\cdot a^{xp/q}\cdots a^{xp/q}}_{q\text{個}}=a^{xp/q+\cdots+xp/q}=a^{q\cdot xp/q}=a^{xp}.$$

ゆえに

$$\xi^q=\eta^q,\ \text{したがって}\ \xi=\eta.$$

(3)　y が負の有理数の場合：$y=-z$ とおけば (2) によって $(a^x)^y=(a^x)^{-z}=1/(a^x)^z=1/a^{xz}=a^{-xz}=a^{xy}$.

(4)　y が無理数の場合：y_n を有理数とし，$y=\lim_{n\to\infty}y_n$ とおくことができる．y_n については (2) および (3) によって $(a^x)^{y_n}=a^{xy_n}$ である．その極限をとれば，左辺は $\lim_{n\to\infty}(a^x)^{y_n}=(a^x)^y$ で右辺は前定理によって $\lim_{n\to\infty}a^{xy_n}=a^{xy}$ であるから，$(a^x)^y=a^{xy}$ である．

定理 49　$\lim_{n\to\infty}x_n=x>0$ とすれば，$\lim_{n\to\infty}x_n{}^a=x^a$.

証明　(1)　$a=0$ の場合：明らかである．

(2)　$a\neq 0$ の場合：ε を x^a よりも小なる任意の正の数とし，

$$(x^a-\varepsilon)^{1/a}=y, \qquad (x^a+\varepsilon)^{1/a}=z$$

とおく．法則 III によれば

$$y^a=x^a-\varepsilon, \qquad z^a=x^a+\varepsilon.$$

ゆえに

$$z^a>x^a>y^a.$$

$a>0$ とすれば $z>x>y$，$a<0$ とすれば $z<x<y$ である(定理 47)．いずれの場合にせよ，$\lim_{n\to\infty}x_n=x$ であるから，$n\geqq n_0$ であるすべての n に対して，x_n が y と z の間にあるように n_0 を選ぶことができる．定理 47 により，$x_n{}^a$ は y^a と z^a の間にある．ゆえに

$$x^a-\varepsilon<x_n{}^a<x^a+\varepsilon \qquad (n\geqq n_0).$$

ゆえに

$$\lim_{n\to\infty}x_n{}^a=x^a.$$

定理 48 および定理 49 を含む一般な定理がある．

定理 50　$\lim_{n\to\infty}x_n=x>0$ かつ $\lim_{n\to\infty}y_n=y$ とすれば，$\lim_{n\to\infty}x_n{}^{y_n}=x^y$.

証明　n_0 を適当にとれば，$n\geqq n_0$ であるすべての n に対して

$$\frac{1}{2}x<x_n<2x.$$

ゆえに

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{|y_n-y|}<x_n{}^{|y_n-y|}<(2x)^{|y_n-y|} \qquad (\text{定理 47}).$$

定理 48 によれば両端はそれぞれ極限値 $(x/2)^0=1$ および $(2x)^0=1$ を持つ．ゆえに

$$\lim_{n\to\infty}x_n{}^{|y_n-y|}=1,\ \text{したがって}\quad \lim_{n\to\infty}x_n{}^{-|y_n-y|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n{}^{|y_n-y|}}=1.$$

ゆえに

$$\lim_{n\to\infty}x_n{}^{y_n-y}=1.$$

しかるに定理 49 によれば $\lim_{n\to\infty}x_n{}^y=x^y$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} x_n^{y_n} = \lim_{n\to\infty}(x_n^{y} \cdot x_n^{y_n - y}) = x^y \cdot 1 = x^y.$$

定理 51　$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ ならば，正の数 a に対して，$\lim_{n\to\infty} x_n^a = 0$.

証明　ε を任意の正の数とし，$\varepsilon^{1/a} = b$ とおけば，十分大きな n に対しては $x_n < b$ である．ゆえに $0 < x_n^a < b^a = \varepsilon$ (定理 47)．ゆえに $\lim_{n\to\infty} x_n^a = 0$.

定理 52　$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ かつ $\lim_{n\to\infty} y_n = y > 0$ とすれば，$\lim_{n\to\infty} x_n^{y_n} = 0$.

証明　$n \geqq n_0$ であるすべての n について

$$x_n < 1 \quad \text{かつ} \quad y_n > \frac{y}{2}$$

となるように整数 n_0 を選ぶことができる．ゆえに $0 < x_n^{y_n} < x_n^{y/2}$ (定理 46)．定理 51 により $\lim_{n\to\infty} x_n^{y/2} = 0$ であるから $\lim_{n\to\infty} x_n^{y_n} = 0$.

定義 19　正の数 a に対して $0^a = 0$ と定める (a を正の整数とすれば，この定義は新しいものではない)．

注意　定理 48 は a^x が $-\infty < x < \infty$ で x の連続函数，定理 49 は x^a が $0 < x < \infty$ で x の連続函数，定理 50 は x^y が $0 < x < \infty$，$-\infty < y < \infty$ で二変数 x, y の連続函数であることを意味する．定理 51 および定義 19 によれば，$a > 0$ なる場合には x^a は $x = 0$ までこめて連続，定理 52 および定義 19 によれば $0 < y < \infty$，$0 \leqq x < \infty$ で x^y は x, y について連続である．

24. 対　数

二つの正数 a と u が任意に与えられた場合に

$$a^\xi = u$$

を満足する一つの ξ が存在するか否かを調べてみる．$a=1$ の場合は，$u=1$ でなければこのような ξ は存在しないし，$u=1$ であれば任意の数が上の方程式を満足する．ゆえに，この場合を除外して今後 $a \neq 1$ とする．

まず，このような ξ がただ一つなことは $\xi \neq \eta$ とすれば $a^\xi \neq a^\eta$ であることからわかる (定理 46 による)．

つぎにこのようなξの存在を証明する.

(1)　$a>1$ の場合: $\lim_{n\to\infty}a^n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}a^{-n}=0$ であるから,

$$a^{n_0}>u \quad かつ \quad a^{-n_0}<u$$

を満足する整数 n_0 がある.

$a^x>u$ なるすべての x の集合を M とする. M に属するおのおのの数は $-n_0$ よりも大きい. なぜかといえば, $x\leqq -n_0$ とすれば $a^x\leqq a^{-n_0}<u$ である. 集合 M は下界を持つから下限 ξ が存在する. つぎに, この ξ が求めるもの, すなわち $a^\xi=u$ であることを示そう. 定理 48 によれば

$$\lim_{n\to\infty}a^{\xi-1/n}=a^\xi, \qquad \lim_{n\to\infty}a^{\xi+1/n}=a^\xi.$$

$a^\xi>u$ とすれば, n を十分大きく選ぶとき $a^{\xi-1/n}>u$ が成立するから, この n に対しては $\xi-(1/n)$ は M に属する. ξ は M の下限であるから, $\xi\leqq\xi-(1/n)$ でなければならない(不合理). $a^\xi<u$ とすれば, n を十分大きく選ぶとき $a^{\xi+1/n}<u$ が成立するから, この n に対しては $\xi+(1/n)$ は M の一つの下界である. ゆえに $\xi+(1/n)\leqq\xi$ (不合理).

(2)　$0<a<1$ の場合: 方程式 $a^\xi=u$ を $(1/a)^{-\xi}=u$ と書き直せば, $1/a>1$ であるから (1) によってこのような ξ は存在する.

定理 53　兼定義 20　$a\,(\neq 1)$ および u を任意の二つの正の数とすれば

$$a^\xi=u$$

を満足する ξ は一つしかもただ一つ存在する. この ξ を a を底とする u の対数といい, $\xi=\log_a u$ で表わす.

注意　これによれば, 対数はいかなる正数についても定義されて, 底には 1 を例外としていかなる正数でも用い得ることがわかる. 特に, 底を指定する必要のない場合または底が明瞭な場合には底を略し単に $\log u$ で表わす.

対数に関してつぎの諸法則が成立する:

Ⅰ. $\log(uv)=\log u+\log v.$　　Ⅴ. $\log_a a=1.$

Ⅱ. $\log\dfrac{u}{v}=\log u-\log v.$　　Ⅵ. $\log_b u=\dfrac{\log_a u}{\log_a b}.$

Ⅲ. $\log u^r=\gamma\cdot\log u.$　　Ⅶ. $\log_{1/a}u=-\log_a u.$

Ⅳ. $\log 1=0.$

ここに法則Ⅰ-Ⅳにおける底は任意とする．ただしⅠ-Ⅲの両辺の対数は同じ底を持つものとする．

証明はいずれも簡単であるから省略する．

例　Ⅵを証明して見よう．bは対数の底となっているから$b\neq1$である．$\log_b u=\xi$, $\log_a b=\eta$とおけば$b^\xi=u$, $a^\eta=b$, $u=b^\xi=(a^\eta)^\xi=a^{\eta\xi}$. ゆえに$\eta\xi=\log_a u$. $\eta\neq0$(なぜかといえば$b\neq1$)であるからηで割り，ξ,ηをもとに直せば

$$\log_b u=\frac{\log_a u}{\log_a b}.$$

25. 対数に関する定理

定理54　$a>1$ならば，$\log_a x$はxとともに増加する．$a<1$ならば，$\log_a x$はxの増加につれて減少する．

証明　$a>1$の場合を証明すれば十分である(Ⅶによる).

$x<y$とする．$\log_a x=\xi$, $\log_a y=\eta$とおけば$a^\xi=x$, $a^\eta=y$. 仮に$\log x\geqq\log y$とすれば，$\xi\geqq\eta$, したがって$a^\xi\geqq a^\eta$, すなわち$x\geqq y$でなければならない(定理46). ゆえに$\log x<\log y$.

定理55　正の数$x_1, x_2, \cdots$が正の極限値xを持つとすれば，

$$\lim_{n\to\infty}(\log_a x_n)=\log x.$$

証明　数列$\{x_n\}$が$x=x\cdot a^0$なる極限値を持つから，正数εを任意に与えた場合に，整数n_0を適当に定めると，$n\geqq n_0$であるすべてのnについてx_nは$x\cdot a^{-\varepsilon}$と$x\cdot a^\varepsilon$の間にあるようにできる．ゆえに

$$\log x-\varepsilon=\log(x\cdot a^{-\varepsilon})<\log x_n<\log(x\cdot a^\varepsilon)=\log x+\varepsilon,$$

すなわち

$$|\log x - \log x_n| < \varepsilon \qquad (n \geqq n_0).$$

注意 この定理の主張は $\log x$ は $x>0$ で連続な函数であるということと同一である.

定理 56 $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ とすれば

$$a>1 \quad \text{のとき} \quad \lim_{n\to\infty}(\log_a x_n) = \infty,$$

$$a<1 \quad \text{のとき} \quad \lim_{n\to\infty}(\log_a x_n) = -\infty.$$

証明 VII によれば, $a>1$ の場合を証明すれば十分である. $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ から G を任意の一つの正数としたとき十分大きなすべての n について $x_n > a^G$ が成立する. ゆえに

$$\log_a x_n > \log_a a^G = G \qquad (\text{定理} 54).$$

ゆえに

$$\lim_{n\to\infty}(\log_a x_n) = \infty.$$

定理 57 $x_n>0$ かつ $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ とすれば

$$a>1 \quad \text{のとき} \quad \lim_{n\to\infty}(\log_a x_n) = -\infty,$$

$$a<1 \quad \text{のとき} \quad \lim_{n\to\infty}(\log_a x_n) = \infty.$$

証明 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n} = \infty$ であるから定理 56 によれば

$$\lim_{n\to\infty}\left(\log_a \frac{1}{x_n}\right) = \begin{cases} \infty & (a>1), \\ -\infty & (a<1). \end{cases}$$

ゆえに

$$\lim_{n\to\infty}(\log_a x_n) = \begin{cases} -\infty & (a>1), \\ \infty & (a<1). \end{cases}$$

なぜかといえば

$$\log_a \frac{1}{x_n} = \log_a 1 - \log_a x_n = -\log_a x_n.$$

26. 自然対数

解析学においてもっとも重要な対数は

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

を底とするもので，これを自然対数という．

$u_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ とおく．数列 $\{u_n\}$ が有限な極限値を持つことを証明する．それには $\{u_n\}$ が単調に増加することおよび一つの上界を持つことを示せばよい．u_n を二項定理で $n+1$ 項の和に展開すれば

$$u_n=1+n\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{n\cdots(n-p+1)}{1\cdot 2\cdots p}\frac{1}{n^p}+\cdots$$

$$=1+1+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{1\cdot 2\cdots p}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{p-1}{n}\right)+\cdots.$$

右辺は n とともに項の数とおのおのの項の値が増加するから，$\{u_n\}$ は単調に増加する．つぎに $(p+1)$ 番目の項は

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdots p}<\frac{1}{2^{p-1}}$$

より小であるから，

$$u_n<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}<3.$$

ゆえに $\{u_n\}$ は一つの上界3を持つ．

通常 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ を e で表わす．つぎに $\{a_n\}$ を $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$ である任意の数列とし，a_n に含まれる最大の整数を g_n とすれば，$\lim\limits_{n\to\infty}g_n=\infty$ かつつぎの不等式が成立する：

$$\left(1+\frac{1}{g_n+1}\right)^{g_n}<\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}<\left(1+\frac{1}{g_n}\right)^{g_n+1}.$$

この不等式の両端の項はともに極限値 e を持つから[1)]，

$$\text{(1)}\qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e.$$

---

1) $\left(1+\dfrac{1}{g_n+1}\right)^{g_n}=\left(1+\dfrac{1}{g_n+1}\right)^{g_n+1}\Big/\left(1+\dfrac{1}{g_n+1}\right)$, $\left(1+\dfrac{1}{g_n}\right)^{g_n+1}=\left(1+\dfrac{1}{g_n}\right)^{g_n}\cdot\left(1+\dfrac{1}{g_n}\right)$ とおいて見る．

$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ としてもやはり (1) が成立することを証明する．$a_n = -b_n$ とおけば $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$.

$$\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \left(1-\frac{1}{b_n}\right)^{-b_n} = \left(\frac{b_n}{b_n-1}\right)^{b_n} = \left(1+\frac{1}{b_n-1}\right)^{b_n}$$

$$= \left(1+\frac{1}{b_n-1}\right)^{b_n-1}\cdot\left(1+\frac{1}{b_n-1}\right).$$

ゆえに

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{b_n-1}\right)^{b_n-1}\left(1+\frac{1}{b_n-1}\right)\right\} = e.$$

上に述べたことをまとめて，

定理 58 $a_1, a_2, \cdots$ を極限値 ∞ または $-\infty$ を持つ任意の一つの数列とすれば

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

e の数値を近似的に求めるにはつぎのようにする．u_n の展開式から

$$u_n < 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!} \qquad (n!=1\cdot2\cdots n).$$

他方において，p を固定し $n>p$ とすれば

$$u_n > 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{p!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{p-1}{n}\right).$$

n を ∞ に近づけた極限をとれば

$$e \geqq 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{p!}.$$

p は任意の自然数であるから

$$u_n < 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!} \leqq e.$$

ゆえに

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right).$$

これから e の値を求めれば

$$e = 2.718281828\cdots$$

である．

27. 小 数

p を一つの整数$(\geqq 2)$とし，α_0 を任意の一つの実数(有理または無理)とする．今後一つの数 x に含まれる最大の整数を記号$[x]$で表わすことにする．

$$\alpha_1 = p(\alpha_0 - c_0), \qquad c_0 = [\alpha_0]$$

とおけば

$$0 \leqq \alpha_1 < p$$

である．つぎに

$$\alpha_2 = p(\alpha_1 - c_1), \qquad c_1 = [\alpha_1]$$

とおけば

$$0 \leqq \alpha_2 < p$$

である．この方法を無限に続けていくことができて，一般に

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_{\nu+1} = p(\alpha_\nu - c_\nu), \qquad c_\nu = [\alpha_\nu] \\ 0 \leqq \alpha_{\nu+1} < p \end{array}\right\} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

である．この方法を p **進法式** (p-adischer Algorithmus) という．一つの数 α_0 が与えられると p 進法式によって一意的に一つの整数列

$$c_0, \quad c_1, \quad c_2, \quad \cdots$$

が得られる．つぎにこれらの c_ν にはいかなる制限が付くか調べて見よう．$\nu \geqq 1$ ならば $0 \leqq \alpha_\nu < p$ であるから，α_ν に含まれる最大の整数 c_ν はただ $0, 1, \cdots, p-1$ の p 個の値の中の一つをとることができる．ただし c_0 にはこの制限がない．c_ν はある ν からさき全部 0 に等しくなることはあるが(たとえば α_0 が一つの整数のときは $\alpha_1 = 0$，したがって $c_1, c_2, c_3, \cdots$ 全部が 0 に等しい)，c_ν がある ν からさき全部 $p-1$ に等しいということは起らない．仮に，$\nu \geqq n$ (n は一つの定まった正の整数)であるすべての ν に対して $c_\nu = p-1$ とすれば

$$p - \alpha_\nu = \frac{p - \alpha_{\nu+1}}{p} \qquad (\nu = n, n+1, n+2, \cdots).$$

ゆえに

$$p-\alpha_n=\frac{p-\alpha_{n+1}}{p}=\frac{p-\alpha_{n+2}}{p^2}=\frac{p-\alpha_{n+3}}{p^3}=\cdots.$$

ゆえに

$$p-\alpha_n=\frac{p-\alpha_{n+r+1}}{p^{r+1}}\leqq\frac{p}{p^{r+1}}=\frac{1}{p^r}\qquad(r\text{は正の整数}).$$

rはnに無関係であるから

$$p-\alpha_n\leqq 0,\ \text{したがって}\ \ p\leqq\alpha_n\qquad(\text{不合理}).$$

こうして,

任意に一つの数α_0が与えられた場合に, これにp進法式を行えば, 一意的に一つの整数列

$$c_0,\ c_1,\ c_2,\ \cdots$$

が得られかつつぎの二つの性質を満足する:

(1)　$\nu=1,2,\cdots$に対して

$$0\leqq c_\nu\leqq p-1.$$

(2)　無限に多くのνに対して

$$c_\nu\leqq p-2.$$

逆に, この二つの性質を満足する任意の整数列$\{c_\nu\}$が与えられたとき, p進法式によって, この数列が作られるような数は一つしかもただ一つ存在することを証明する.

このような二つの数α_0, β_0があれば, 必然的に$\alpha_0=\beta_0$でなければならない. なぜかといえばα_0とβ_0にp進法式を行えば,

$$\alpha_0=c_0+\frac{\alpha_1}{p},\ \ \alpha_1=c_1+\frac{\alpha_2}{p},\ \ \alpha_2=c_2+\frac{\alpha_3}{p},\ \ \cdots,$$

$$\beta_0=c_0+\frac{\beta_1}{p},\ \ \beta_1=c_1+\frac{\beta_2}{p},\ \ \beta_2=c_2+\frac{\beta_3}{p},\ \ \cdots.$$

ここに

$$0\leqq\alpha_\nu<p,\ \ 0\leqq\beta_\nu<p\qquad(\nu=1,2,\cdots)$$

である．

したがって

$$\alpha_0-\beta_0=\frac{\alpha_1-\beta_1}{p},\ \ \alpha_1-\beta_1=\frac{\alpha_2-\beta_2}{p},\ \ \cdots.$$

ゆえに

$$|\alpha_0-\beta_0|=\frac{|\alpha_1-\beta_1|}{p}=\frac{|\alpha_2-\beta_2|}{p^2}=\cdots=\frac{|\alpha_{n+1}-\beta_{n+1}|}{p^{n+1}}<\frac{p}{p^{n+1}}=\frac{1}{p^n}.$$

n は任意に大きくとれるから $\alpha_0=\beta_0$ でなければならない．

つぎに，実際このような数が存在することを証明しよう．

$\lambda=0,1,2,\cdots$ として

$$s_\lambda^{(n)}=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{c_{\lambda+\nu}}{p^\nu}\qquad(\lambda \text{ は固定，} n=0,1,2,\cdots)$$

という数列 $\{s_\lambda^{(n)}\}$ を考えよう． $s_\lambda^{(n)}$ は n とともに単調に増加し，

$$s_\lambda^{(n)}=c_\lambda+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{c_{\lambda+\nu}}{p^\nu}\leqq c_\lambda+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{p-1}{p^\nu}=c_\lambda+1-\frac{1}{p^n}<c_\lambda+1$$

であるから一つの上界を持ち，したがって $\{s_\lambda^{(n)}\}$ は収束する．この極限値を α_λ とおけば

$$\lim_{n\to\infty}s_\lambda^{(n)}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{c_{\lambda+\nu}}{p^\nu}=\alpha_\lambda\qquad(\lambda=0,1,2,\cdots).$$

しかるに

$$c_\lambda\leqq s_\lambda^{(n)}<c_\lambda+1$$

であるから

$$c_\lambda\leqq\alpha_\lambda\leqq c_\lambda+1$$

である．この場合において第二の等号は起らないことを次に示そう．無限に多くの ν について $c_\nu\leqq p-2$ であるから，おのおのの λ に対して $c_{\lambda+\mu}\leqq p-2$ である $\mu\,(\geqq 1)$ を選ぶことができる．したがって $n\geqq\mu$ であるすべての n について

$$s_\lambda^{(n)}=c_\lambda+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{c_{\lambda+\nu}}{p^\nu}\leqq c_\lambda+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{p-1}{p^\nu}-\frac{1}{p^\mu}$$

$$= c_\lambda + 1 - \frac{1}{p^n} - \frac{1}{p^\mu} < c_\lambda + 1 - \frac{1}{p^\mu}.$$

ゆえに

$$\alpha_\lambda = \lim_{n\to\infty} s_\lambda^{(n)} \leqq c_\lambda + 1 - \frac{1}{p^\mu} < c_\lambda + 1.$$

ゆえに

$$c_\lambda \leqq \alpha_\lambda < c_\lambda + 1 \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \cdots).$$

ゆえに c_λ は α_λ に含まれる最大の整数 $[\alpha_\lambda]$ に等しい.

$s_\lambda^{(n)}$ の定義によれば

$$s_\lambda^{(n)} = c_\lambda + \frac{s_{\lambda+1}^{(n-1)}}{p} \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \cdots)$$

であるから，$n\to\infty$ の極限をとれば

$$\alpha_\lambda = c_\lambda + \frac{\alpha_{\lambda+1}}{p} \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \cdots).$$

ゆえに

$$\alpha_{\lambda+1} = p(\alpha_\lambda - c_\lambda), \quad c_\lambda = [\alpha_\lambda] \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \cdots).$$

ゆえに

$$\alpha_0 = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu}{p^\nu}$$

は求める数である．こうして証明は完全に終ったわけである[1].

以上の所論によれば,

(1) と (2) の性質を満足する整数列

$$c_0, \ c_1, \ c_2, \ \cdots$$

の全体の集合と実数全体の集合とは p 進法式によって一対一の対応が付けられる.

そこで実数 α_0 を，対応する整数列 $\{c_\nu\}$ を用いてつぎのように表わす:

(1) $$\alpha_0 = c_0 + 0.c_1c_2c_3\cdots.$$

1) 級数の理論を仮定すれば証明はひじょうに簡単になる.

(2)　$$\alpha_0 = c_0.c_1c_2c_3\cdots \qquad (c_0 \geqq 0).$$

したがって

$$\alpha_\lambda = c_\lambda.c_{\lambda+1}c_{\lambda+2}\cdots.$$

もしある ν からさき(たとえば $\nu>n$)全部0に等しい場合は0を省略して単に

(3)　$$\alpha_0 = c_0 + 0.c_1c_2c_3\cdots c_n.$$

このような数の記法を p **を基数とする小数**(p 進小数)という．すでに証明した所によれば

$$c_0 + 0.c_1c_2c_3\cdots = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu}{p^\nu}$$

が成り立つ．

これらの結果をまとめて見れば，

定理59　任意の数 α_0 はただ一通りに p 進小数

$$\alpha_0 = c_0 + 0.c_1c_2c_3\cdots = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu}{p^\nu}$$

で表わされる．ここに $c_0, c_1, c_2, \cdots$ は p 進法式によって与えられたものとする．したがってこれらはつぎの二つの性質を満足する．

(1)　$\nu=1, 2, \cdots$ に対して $0 \leqq c_\nu \leqq p-1$.

(2)　無限に多くの ν に対して $c_\nu \leqq p-2$.

逆に任意のこのような p 進小数は一つの数を表わす．

注意　実用上は基数10なるすなわち十進小数が用いられるが，理論上には基数 $p=2$ がしばしば用いられる．

小数がいかなる場合に有理数を表わし，いかなる場合に無理数を表わすか，これを判定することは興味ある問題であろう．

定理60　小数が有理数を表わすのは，これが周期的である，換言すればあるところからさき常に同一の組 $c_hc_{h+1}\cdots c_{h+k-1}$ が繰り返す場合かつこの場合に限られる．

証明　α_0 を有理数とすれば，a を整数，b を正の整数とし，a/b とおくことが

できる.

p 進法式によれば

$$\alpha_1 = p(\alpha_0 - c_0),\quad \alpha_2 = p(\alpha_1 - c_1),\quad \cdots \qquad (c_0=[\alpha_0],\ c_1=[\alpha_1],\ \cdots)$$

であるから, $\alpha_\nu\ (\nu=1,2,\cdots)$ は分母が b で分子が p を因数に持つような分数(既約分数というのではない[1])である. $\nu\geqq 1$ からは $0\leqq\alpha_\nu<p$ であるから α_ν は単に b 個の値

$$0,\ \frac{p}{b},\ \frac{2p}{b},\ \cdots,\ \frac{(b-1)p}{b}$$

の一つをとり得る. しかるに $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ は無限に続くから全部がたがいに異なることはできない. たとえば

$$\alpha_{h+k} = \alpha_h$$

とすれば,

$$c_{h+k}.c_{h+k+1}c_{h+k+2}\cdots = c_h.c_{h+1}c_{h+2}\cdots$$

であるから, 一意性によって

$$c_{h+k+\nu} = c_{h+\nu} \qquad (\nu=0,1,2,\cdots).$$

したがって

$$c_{h+\nu+nk} = c_{h+\nu} \qquad \begin{pmatrix}\nu=0,1,2,\cdots,k-1\\ n=1,2,3,\cdots\end{pmatrix}.$$

こうして α_0 を表わす小数は周期的となり, その周期は k 個からなる組 $c_hc_{h+1}\cdots c_{h+k-1}$ である(必要条件).

逆に

$$\alpha_0 = c_0 + 0.c_1c_2\cdots c_{h-1}c_h\cdots c_{h+k-1}c_h\cdots c_{h+k-1}\cdots$$

を一つの周期 $c_hc_{h+1}\cdots c_{h+k-1}$ を持つ小数とする.

$$s_0^{(n)} = \sum_{\nu=0}^{n}\frac{c_\nu}{p^\nu}$$

とおけば

---

1) a/b が既約分数であっても, α_ν は約分可能な場合がある.

$$\alpha_0=\lim_{n\to\infty}s_0^{(n)}.$$

定理 37 によれば

$$\alpha_0=\lim_{n\to\infty}s_0^{(h-1+nk)}.$$

$$\begin{aligned}s_0^{(h-1+nk)}=\sum_{\nu=0}^{h-1}\frac{c_\nu}{p^\nu}&+\left(\frac{c_h}{p^h}+\cdots+\frac{c_{h+k-1}}{p^{h+k-1}}\right)\\&+\left(\frac{c_h}{p^{h+k}}+\cdots+\frac{c_{h+k-1}}{p^{h+2k-1}}\right)\\&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+\left(\frac{c_h}{p^{h+(n-1)k}}+\cdots+\frac{c_{h+k-1}}{p^{h+nk-1}}\right).\end{aligned}$$

右辺を計算すれば

$$\begin{aligned}s_0^{(h-1+nk)}&=\sum_{\nu=0}^{h-1}\frac{c_\nu}{p^\nu}+\left(1+\frac{1}{p^k}+\cdots+\frac{1}{p^{(n-1)k}}\right)\left(\frac{c_h}{p^h}+\cdots+\frac{c_{h+k-1}}{p^{h+k-1}}\right)\\&=\sum_{\nu=0}^{h-1}\frac{c_\nu}{p^\nu}+\frac{1-\frac{1}{p^{nk}}}{1-\frac{1}{p^k}}\sum_{\nu=0}^{k-1}\frac{c_{h+\nu}}{p^{h+\nu}}.\end{aligned}$$

ゆえに $n\to\infty$ の極限をとれば

$$\alpha_0=\sum_{\nu=0}^{h-1}\frac{c_\nu}{p^\nu}+\frac{p^k}{p^k-1}\sum_{\nu=0}^{k-1}\frac{c_{h+\nu}}{p^{h+\nu}}$$

である．ゆえに α_0 は有理数を表わす(十分条件).

注意　われわれの定義では

$$0.c_1c_2\cdots c_{n-1}(p-1)(p-1)\cdots$$

である p 進小数は存在しない(p 進法式によってできるような小数ばかりを考えたからである)．定理 59 の (2) がなくとも，級数

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{c_\nu}{p^\nu}\qquad(0\leqq c_\nu\leqq p-1,\ c_\nu\text{は整数})$$

は収束する．したがって一つの数を表わす．このような収束級数に対して

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{c_\nu}{p^\nu}=0.c_1c_2c_3\cdots c_n\cdots$$

を p 進小数と定義すれば今までとは事情が変って来る．$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{c_\nu}{p^\nu}$ においてある ν からさき $c_\nu=p-1$ とする．このような ν の最小数を n で表わそう．

$n>1$ と仮定する($n=1$ のときも同様).

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{c_\nu}{p^\nu}=\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{c_\nu}{p^\nu}+(p-1)\sum_{\nu=n}^{\infty}\frac{1}{p^\nu}$$
$$=\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{c_\nu}{p^\nu}+\frac{1}{p^{n-1}}$$
$$=\frac{c_1}{p}+\frac{c_2}{p^2}+\cdots+\frac{c_{n-1}+1}{p^{n-1}}.$$

$c_{n-1}+1\leqq p-1$ であるから

$$0.c_1c_2\cdots c_{n-1}(p-1)(p-1)\cdots=0.c_1c_2\cdots(c_{n-1}+1).$$

すなわち同一の数が二通りに表わされることになる．この新しい定義によって，$0<\alpha<1$ である数 α が二通りに表わされるのは α が有限小数である場合かつこの場合に限られることは定理 59 から推論される．

以上で実数のおもな性質はほとんど述べたつもりである．われわれはデデキントの見地から，有理数の切断で実数を定義し，しかる後に極限概念を導き，ベキ，対数等を論じてきた．無理数論は同一の存在であっても，その述べ方にはいろいろな見地がある．たとえば実数の四則を定義するにも，実数の相等，大小，和，差までを切断で定義しておいて，さきに極限概念を導き，極限を用いて積，商を定義した方が簡単であったかも知れない．

次章においてデデキントと対立して有名なカントル(G. Cantor)の無理数論の大体を説明して見よう．

第5章　カントルの無理数論

デデキントの見地からかなり詳細に無理数の理論を述べたが，カントルの見地からも少しく述べて見よう．デデキントの無理数論では有理数の切断が基礎をなすように，カントルの場合には基本列(Fundamentalreihe)といわれる有理数列が基調となる．基本列の定義から始める．基本列の定義は結局定理41′の条件を満足する一つの有理数列であるが重要であるから繰り返して述べよう．

定義1　有理数からなる数列

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots$$

が与えられたとして，任意に正の有理数 ε を与えたとき，

$m=1,2,\cdots$ に対して

$$|a_n-a_{n+m}|<\varepsilon$$

が成立するように整数 n を定められるならば，これを**基本列**という．

第3章第19節の所論からただちにつぎのことがいわれる．

(a)　基本列の定義は定理41の条件の形に述べることができる．正の有理数 ε を任意に与えた場合に，$m\geqq n_0$ および $n\geqq n_0$ であるすべての m,n に対して

$$|a_m-a_n|<\varepsilon$$

が成立するように n_0 を定めることができることである．

(b)　基本列は有界である(定理41の証明参照)．

(c)　有理数列が単調に増加し，一つの上界(有理数)を持つならば，これは基本列である．有理数列が単調に減少し，一つの下界を持つ場合も同様である(定理42の証明参照)．

(d)　$\{a_n\}$ および $\{b_n\}$ をともに基本列とすれば，正の数 ε を任意に与えた場

合に，m および m' はすべての自然数の値をとり得るものとし，

$$|a_{n+m}-a_{n+m'}|<\varepsilon \quad \text{および} \quad |b_{n+m}-b_{n+m'}|<\varepsilon$$

が同時に成立するように n を選ぶことができる．

(a)によって，おのおのについて ε に対する整数 n を定め，両者の大きい方を取ればよい．

定理 1　$\{a_n\}$ および $\{b_n\}$ を基本列とすれば[1]，

$$\{a_n+b_n\}, \qquad \{a_n-b_n\}, \qquad \{a_nb_n\}, \qquad \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$$

もまた基本列である．ただし最後の場合には $|b_n|>\delta\,(>0)$ とする．

証明　$$|(a_n\pm b_n)-(a_{n+m}\pm b_{n+m})| \leqq |a_n-a_{n+m}|+|b_n-b_{n+m}|.$$

任意の正数 ε に対して，$m=1,2,\cdots$ について

$$|a_n-a_{n+m}|<\frac{\varepsilon}{2}, \qquad |b_n-b_{n+m}|<\frac{\varepsilon}{2}$$

が同時に成立するように n を定めることができる((d)による)．このような n に対しては

$$|(a_n\pm b_n)-(a_{n+m}\pm b_{n+m})|<\varepsilon.$$

ゆえに $\{a_n+b_n\}$，$\{a_n-b_n\}$ は基本列である．

$$\begin{aligned}|a_nb_n-a_{n+m}b_{n+m}| &= |a_n(b_n-b_{n+m})+b_{n+m}(a_n-a_{n+m})| \\ &< M(|b_n-b_{n+m}|+|a_n-a_{n+m}|).\end{aligned}$$

$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は有界であるから $|a_n|<M$，$|b_{n+m}|<M$ なる M が存在する((b)による)．与えられた正数 ε に対して

$$|b_n-b_{n+m}|<\varepsilon_1, \quad |a_n-a_{n+m}|<\varepsilon_1 \qquad \left(\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{2M}\right)$$

であるように n を定めると，$|a_nb_n-a_{n+m}b_{n+m}|<\varepsilon$ である．ゆえに $\{a_nb_n\}$ は基本列である．最後に

$$\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+m}}{b_{n+m}}=\frac{a_n(b_{n+m}-b_n)+b_n(a_n-a_{n+m})}{b_nb_{n+m}}$$

---

1)　以後ことわりがあるまで数は有理数を意味する．

であるから

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+m}}{b_{n+m}}\right| < \frac{M(|b_{n+m}-b_n|+|a_n-a_{n+m}|)}{\delta^2} \qquad (|a_n|<M,\ \ |b_n|<M).$$

前とまったく同じ議論で $\{a_n/b_n\}$ もまた基本列である．

定義2　カントルにならって，基本列 $\{a_n\}$ で一つの新しい数を定義して，これを**実数**という．基本列(実数)を表わすのに $\alpha=\{a_n\}$ という記号を用いる．

I．**相等**　任意に正の有理数 ε を与えたとき，$m=1,2,\cdots$ に対して

$$|a_{n+m}-b_{n+m}| < \varepsilon$$

が成立するように n を定められる場合に，$\alpha=\{a_n\}$ および $\beta=\{b_n\}$ は相等しいといい，$\alpha=\beta$ と書く．

II．**大小**　δ を正の有理数とし，$m=1,2,\cdots$ に対して，

$$a_{n+m}-b_{n+m} > \delta$$

であるように n と δ とを定められる場合には，$\alpha=\{a_n\}$ は $\beta=\{b_n\}$ よりも大であるといい，$\alpha>\beta$ と書く．α が β よりも大であるならば，β は α よりも小であるといい，$\beta<\alpha$ と書く．

定理2　二つの実数 α,β の間には，$\alpha=\beta$，$\alpha<\beta$，$\alpha>\beta$ のいずれか一つが成立して，それらのいずれもが両立しない．

証明　ε を任意の正の有理数としたとき，

$m=1,2,\cdots$ に対して

$$|a_n-a_{n+m}| < \varepsilon, \qquad |b_n-b_{n+m}| < \varepsilon$$

であるように n を選ぶことができる．ゆえに

$$|(a_n-b_n)-(a_{n+m}-b_{n+m})| < 2\varepsilon.$$

ゆえに

$$a_n-b_n-2\varepsilon < a_{n+m}-b_{n+m} < a_n-b_n+2\varepsilon.$$

$a_n-b_n-2\varepsilon$，$a_n-b_n+2\varepsilon$ が同符号を持つように ε と n とを選ぶことができる場合に，これが正であれば

$$a_{n+m}-b_{n+m} > a_n-b_n-2\varepsilon > 0,\ \text{したがって}\ \ \alpha > \beta,$$

負であれば

$$a_{n+m}-b_{n+m} < a_n-b_n+2\varepsilon < 0,\ \text{したがって}\ \ \alpha < \beta$$

である．このような ε と n が存在しないとすれば，換言すれば ε をいかに小さくとっても異符号であれば

$$|a_{n+m}-b_{n+m}| < 4\varepsilon,\ \text{ゆえに}\ \ \alpha = \beta.$$

$\alpha=\beta$，$\alpha>\beta$，$\alpha<\beta$ のいずれの二つも両立しないことは定義から明らかである．

$a, a, a, \cdots$ または $\{a\}$（すべての項が同一の有理数 a から成る）を有理数 a に対応する実数といい，a^* で表わす．

大小の定義によれば，有理数相互の大小関係と対応する実数の大小関係とは同一である．換言すれば，有理数 a の全体とこれに対応する実数 a^* の全体とは大小の順序まで考えに入れて一対一の対応が付けられる．

Ⅲ．**四則**　α と β を二つの与えられた実数とする．

(1)　$\alpha=\{a_n\}$，$\beta=\{b_n\}$ の和および差は $\{a_n+b_n\}$，$\{a_n-b_n\}$ と定義し，これらを $\alpha+\beta$，$\alpha-\beta$ で表わす．

$\alpha=\{a_n\}$，$\beta=\{b_n\}$ が等しいときは，$\{a_n-b_n\}=0^*$ である．なぜかといえば，相等の定義から，ε を任意の正の有理数とするとき，$m=1, 2, \cdots$ に対して

$$|a_{n+m}-b_{n+m}| < \varepsilon,\ \text{すなわち}\ \ |(a_{n+m}-b_{n+m})-0| < \varepsilon$$

となるように n を定めることができるからである．

(2)　$\alpha=\{a_n\}$，$\beta=\{b_n\}$ の積は $\{a_nb_n\}$ と定義し，$\alpha\beta$ で表わす．

(3)　$\alpha=\{a_n\}$，$\beta=\{b_n\}$ の商は $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ と定義し，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ で表わす．ただし $\beta=\{b_n\}\neq 0^*$ とする．

注意　$\{a_n\pm b_n\}$，$\{a_nb_n\}$，$\{a_n/b_n\}$ が基本列であることはすでに述べてある．

カントルの無理数論では同一の実数を表わす無限に多くの基本列がある（この点はデデキントの実数の定義と比較して見劣りするように思われる）．上述の四則の定義によれば，二つの実数 α および β に四則の演算を行って得られる

実数

$$\alpha+\beta, \quad \alpha-\beta, \quad \alpha\beta, \quad \frac{\alpha}{\beta}$$

は，α および β を表わすのに特に用いた基本列に無関係であることを証明する必要がある．和の場合だけを示そう（他もまったく同様にやればよい）．$\{a_n\}=\{a_n'\}$，$\{b_n\}=\{b_n'\}$ とすれば，

$$\{a_n+b_n\}=\{a_n'+b_n'\}$$

であることをいえばよい．まず，

$$|(a_{n+m}+b_{n+m})-(a'_{n+m}+b'_{n+m})| \leqq |a_{n+m}-a'_{n+m}|+|b_{n+m}-b'_{n+m}|$$

であるから，任意の正の有理数 ε に対して

$$|a_{n+m}-a'_{n+m}|<\frac{\varepsilon}{2}, \quad |b_{n+m}-b'_{n+m}|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (m=0, 1, 2, \cdots)$$

となるような n をとれば，この n に対しては

$$|(a_{n+m}+b_{n+m})-(a'_{n+m}+b'_{n+m})|<\varepsilon.$$

注意 四則に関して，交換，結合，配分の法則が実数の場合にも成り立つことを諸君は証明されたい．

すでに述べたように $a^*=\{a\}$ という実数は大小，四則の演算に対して対応する有理数 a とまったく同一の法則が成立する．われわれはしばらくの間 a^* を有理数 a に対応する**有理実数**と名付ける．実数の中には有理実数以外の数が含まれている．われわれは有理実数以外の実数を**無理数**と名付ける．

注意 無理数の存在についての具体的な一例はこの章の終りで述べるデデキント，カントル両理論の関係のところを参照すればわかる．

定理3 $\alpha=\{a_n\}$，$\beta=\{b_n\}$ を相異なる実数とすれば，α と β との間に無限に多くの有理実数が存在する．

証明 $\alpha>\beta$ と仮定すれば，まず $m=1, 2, \cdots$ に対して

$$a_{n+m}-b_{n+m} \geqq \delta > 0$$

であるような正の有理数 δ と自然数 n が定められる．つぎに $\delta/2$ よりも小なる

正の有理数εを任意に与えたとき自然数nを適当に定めて，

$m=1,2,\cdots$ に対して同時に

$$|a_n-a_{n+m}|<\varepsilon,\qquad |b_n-b_{n+m}|<\varepsilon$$

が成立するようにできる．これらのnは明らかに同一であるように選ぶことができる．さて二つの有理数ε, $\delta-\varepsilon$の間に無限に多くの有理数が存在し，その一つをaとすれば有理実数$(a_n-a)^*=\{a_n-a\}$はαとβとの間にある．なぜかといえば

$$a_{n+m}-(a_n-a)=a+(a_{n+m}-a_n)>a-\varepsilon>0,$$
$$(a_n-a)-b_{n+m}=(a_n-b_n)+(b_n-b_{n+m})-a>\delta-\varepsilon-a>0$$

であるからである．

つぎに有理数の基本列とまったく同様に実数の基本列を定義することができる．ただ有理数列の代りに実数列，任意の正の有理数εの代りに任意の正の実数ηとすればよろしい．実数の基本列$\{\alpha_n\}$に有理数の基本列の場合とまったく同様に相等，大小および四則演算を定義したとき，**実数の基本列$\{\alpha_n\}$の全体と実数の全体の間に大小の順序まで考慮に入れて一対一の対応が付けられる**[1]ことを証明しよう．

そのために最初に$\{a_n\}$を有理数の基本列としたとき，実数列$\{a_n^*\}$，ただしa_n^*は有理数a_nに対応する有理実数，もまた基本列であることを証明しよう．なぜならば，εを任意の正の有理数，ε^*をこれに対応する有理実数，とすれば$\{a_n\}$が基本列であるということから自然数nを適当に選んで

$$|a_n-a_{n+m}|<\varepsilon\qquad(m=1,2,\cdots)$$

が成立するようにできる．したがって

$$|a_n^*-a^*_{n+m}|<\varepsilon^*\qquad(m=1,2,\cdots)$$

となって$\{a_n^*\}$もまた基本列であることがわかる．逆に$\{a_n^*\}$が基本列であるとき$\{a_n\}$もまた基本列であることは容易にわかる．

1)　この事実は実数の連続性の定理に相当するものである．

つぎに，任意の実数の基本列$\{\alpha_n\}$に対して必ずこれと相等しい有理実数の基本列$\{a_n^*\}$の存在することを証明する．簡単のため$\{\alpha_n\}$は相異なる実数ばかりから成るものとし，すべての自然数nに対してα_nとα_{n+1}の間に一つの有理実数a_n^*を選べば一つの有理実数列$\{a_n^*\}$が得られる．

この$\{a_n^*\}$が$\{\alpha_n\}$に等しい基本列であることはつぎのようにしてわかる．まず

$$a_n^*-a^*_{n+m}=(a_n^*-\alpha_n)+(\alpha_n-\alpha_{n+m})+(\alpha_{n+m}-a^*_{n+m}).$$

ゆえに

$$|a_n^*-a^*_{n+m}| \leqq |a_n^*-\alpha_n|+|\alpha_n-\alpha_{n+m}|+|\alpha_{n+m}-a^*_{n+m}|;$$

$\{\alpha_n\}$は基本列であるから，任意の正の実数δを与えたとき，すべての自然数mに対して$|a_n^*-\alpha_n|$，$|\alpha_n-\alpha_{n+m}|$，$|\alpha_{n+m}-a^*_{n+m}|$のおのおのが$\delta/3$よりも小であるようにnを定めれば

$$|a_n^*-a^*_{n+m}|<\delta \qquad (m=1, 2, \cdots)$$

が成立する．したがって$\{a_n^*\}$は基本列である．

つぎに

$$\{\alpha_n\}-\{a_n^*\}=\{\alpha_n-a_n^*\} \quad \text{かつ} \quad |\alpha_n-a_n^*|<|\alpha_n-\alpha_{n+1}|.$$

しかるに$\{\alpha_n\}$は基本列であるから，δを任意の正の実数としたとき自然数n_0を適当に選んで$n_0 \leqq n$である限り$|\alpha_n-\alpha_{n+1}|<\delta$が成り立つようにすれば

$$|\alpha_n-a_n^*|<\delta \qquad (n_0 \leqq n)$$

が成立する．ゆえに$\{\alpha_n\}=\{a_n^*\}$.

さて，有理実数の基本列$\{a_n^*\}$に対して有理数列$\{a_n\}$も基本列となることは最初に注意しておいた．われわれは

$$\{\alpha_n\}=\{a_n^*\}\rightarrow\{a_n\},$$

すなわちおのおのの基本列$\{\alpha_n\}$に有理数の基本列$\{a_n\}$を対応させる．換言すれば基本列$\{\alpha_n\}$には基本列$\{a_n\}$の定める実数αを対応させるのである．

こうすれば，この対応において大小の関係が不変であることはつぎのように

してわかる．いま$\{\alpha_n\}$，$\{\beta_n\}$を二つの実数の基本列，α, βをそれぞれ$\{\alpha_n\}$，$\{\beta_n\}$に対応する実数とすれば

$$\{\alpha_n\} \gtreqless \{\beta_n\} \quad \text{であるとき} \quad \alpha \gtreqless \beta$$

である．実際，$\{\alpha_n\}=\{a_n^*\}$，$\{\beta_n\}=\{b_n^*\}$とすれば

$$\{\alpha_n\}-\{\beta_n\}=\{\alpha_n-\beta_n\} \quad \text{かつ} \quad \alpha_n-\beta_n=(\alpha_n-a_n^*)+(b_n^*-\beta_n)+(a_n^*-b_n^*)$$

であるから，任意の正数ηに対して適当に整数n_0を定めて

$$|\alpha_n-a_n^*|<\frac{\eta}{2}, \qquad |\beta_n-b_n^*|<\frac{\eta}{2}$$

が$n_0 \leqq n$であるすべてのnに対して成立するようにでき，したがって$n_0 \leqq n$ならば

$$a_n^*-b_n^*-\eta<\alpha_n-\beta_n<a_n^*-b_n^*+\eta$$

が成立する．これから容易に$\{a_n^*\} \gtreqless \{b_n^*\}$であるならば$\{\alpha_n\} \gtreqless \{\beta_n\}$であることが出る．したがって$\alpha=\{a_n\}$，$\beta=\{b_n\}$に対しても

$$\alpha \gtreqless \beta \quad \text{ならば} \quad \{\alpha_n\} \gtreqless \{\beta_n\}$$

であることがわかる．

注意　いま証明した定理から実数の基本列$\{\alpha_n\}$を与えれば，それによって一つの実数αが決定されることがわかる．

定義3　$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$を一つの実数列とし，実数$x$があって任意に正の実数$\eta$を与えたとき$m=1, 2, \cdots$に対して

$$|x-x_{n+m}|<\eta$$

となるように整数nを定めることができるならば，数列$\{x_n\}$の極限値はxであるといい，$\lim_{n\to\infty} x_n=x$と書く．

注意　上の定義は数列の極限値の存在には何も主張していない．極限値のある場合に極限値と数列の項との関係について述べているだけである．

さて，実数の基本列$\{x_n\}$には一つの実数xが対応することは少し前に説明したばかりである．$\{x_n\}$と$\{x\}$とは相等しい実数の基本列であるから，正数ηを

任意に与えたとき自然数nを適当に選んで,

$m=1, 2, \cdots$ に対して

$$|x-x_{n+m}|<\eta$$

であるようにできる．したがって定義3によればxは数列$\{x_n\}$の極限値である．逆に実数列$\{x_n\}$が極限値xを持つならば$\{x_n\}$は基本列である．実際ηを任意の正の実数としたとき$m=1, 2, \cdots$ に対して

$$|x-x_{n+m}|<\frac{\eta}{2}$$

となるようにnを定めることができる．したがって

$$|x_n-x_{n+m}| \leqq |x-x_n|+|x-x_{n+m}|<\frac{\eta}{2}+\frac{\eta}{2}=\eta,$$

すなわち$\{x_n\}$は基本列である．

こうしてカントルの無理数論の立場からも定理41を得る．

定理4　実数列$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$が極限値を持つための必要かつ十分な条件は$\{x_n\}$が基本列であることである．換言すれば，$\eta$を任意の正数としたとき，$m=1, 2, \cdots$ に対して

$$|x_n-x_{n+m}|<\eta$$

が成立するように自然数nを定め得ることである．

注意　この定理によれば，基本列は結局前に定義した収束数列である(第3章第19節参照)．

有理数の領域内では，有理数列$\{a_n\}$が基本列であることは極限値が存在するための必要条件であるが，十分条件にはならない．有理数の領域内で極限値を持たない有理数の基本列の存在することから，数の領域を拡張して新しい領域においてはすべての基本列が極限値を持つようにする必要が起る．その目的のためには数の領域を実数にまで拡張すればよいことが明らかにされたわけである．

最後にデデキントとカントルの理論の関係について説明しよう．

(1)　まず，カントルの理論における一つの実数 x を与えるとこれに対応してデデキントの理論における一つの実数 x' が定まる．

実数 x を定義する有理数の基本列を $\{x_n\}$ とする．a を任意の有理数，a^* を a に対応する有理実数，すなわち $a^*=\{a\}$ とする．実際 $x-a^*=\{x_n-a\}$ が 0^* と相異なるとき，ある自然数 n_0 よりも大なるすべての n に対して x_n-a は一定（a によって正または負）の符号を持つ．もし十分大なるすべての n に対して x_n-a が負であるならば a を上組に入れ，これに反して x_n-a が正であるならば a を下組 A_1 に入れる．このいずれでもない有理数 a があるならばこの場合は $x=a^*$ であって a は A_1, A_2 のいずれかに属させる．こうしてデデキントの理論における実数 $x'=(A_1, A_2)$ が定まる．

つぎにカントルの理論では同一の実数を表わすのに無限に多くの有理数の基本列がある．いま述べた対応において基本列のえらびかたによって，対応するデデキントによる実数が変るという心配がある．念のため，このような事情が起らないことをつぎに示そう．同一の実数 x を定義する二つの基本列 $\{x_n\}$, $\{x_n'\}$ に対応する切断をそれぞれ (A_1, A_2), (A_1', A_2') で表わす．a を任意の有理数とするとき

$$x-a^*=\{x_n-a\}=\{x_n'-a\}$$

であるから，$x\neq a^*$ である場合には x_n-a および $x_n'-a$ は十分大なるすべての n に対して一定の符号を持ちしたがって同符号でなければならない．ゆえに，a が A_1 に属するならば a は A_1' にも属し，同様に a が A_2 に属するならば a は A_2' にも属する．しかしながら $x=a^*$ の場合には a が A_1 および A_2' のおのおのに属ししたがって A_2 および A_1' のいずれにも属さないことがある（またはその反対）．いずれの場合にせよ，(A_1, A_2) および (A_1', A_2') の定める実数は同一である．

(2)　(1)の対応に洩れたデデキントの理論における実数の存在しないことをつぎに示そう．そのためには任意の有理数の切断 (A_1, A_2) を与えたときこれを

定めるような一つの有理数の基本列が存在することをいえばよい．任意の正の有理数 ε に対して切断の下組および上組からそれぞれ r_1 および r_2 を取り出して $r_2-r_1=\varepsilon$ となるようにできる[1]．正の有理数ばかりから成る0を極限値とする数列 $\varepsilon_n\,(n=1,2,\cdots)$ を用意して，まず x_1 および x_2 をそれぞれ A_1 および A_2 から選んで $|x_1-x_2|<\varepsilon_1$ となるようにし，つぎに x_3 および x_4 をそれぞれ A_1 および A_2 からえらび $|x_3-x_4|<\varepsilon_2$ かつ x_3 および x_4 はともに x_1 と x_2 の間にあるようにする．この方法を続けて行けば

$$x_1,\ x_3,\ x_5,\ \cdots \quad \text{および} \quad x_2,\ x_4,\ x_6,\ \cdots$$

という数列を得る．$\{x_{2n-1}\}$ は $x_1<x_3<x_5<\cdots$ であってしかも上界 x_2 を持つから基本列である．同様に $\{x_{2n}\}$ もまた基本列である．他方において，$n=1,2,\cdots$ に対して $|x_{2n-1}-x_{2n}|<\varepsilon_n$ であるから

$$\{x_{2n-1}\}=\{x_{2n}\},$$

すなわちカントルの理論における同一の実数を表わす．

a を A_2 に属する一つの有理数とし，a よりも小なる有理数 b が A_2 に属すれば

$$a-x_{2n-1}=(a-b)+(b-x_{2n-1})>a-b>0.$$

ゆえに a が A_2 に属してかつ最小数でなければ a^* は $\{x_{2n-1}\}$ よりも大である．まったく同様にして，有理数 a が A_1 に属してしかも最大数でなければ，a^* は $\{x_{2n}\}$ よりも小である．A_1 が最大数 a を含むとき $x_1, x_3, \cdots$ の代りに $\{a\}$ を，A_2 が最小数 a を含むとき $x_2, x_4, \cdots$ の代りに $\{a\}$ を取ることができる．結局，任意の切断 (A_1, A_2) を与えた場合にこれを定めるような一つの有理数の基本列が存在する．

上述の対応によればカントルの理論における実数とデデキントの理論における実数との間に大小の順序まで考慮に入れて一対一の対応が付けられ，そればかりでなく四則演算までも互いに対応する；例えば一方の実数 α, β に対応する

1）第2章定理8の証明を見よ．

他方の実数をα', β'とすれば，$\alpha+\beta$と$\alpha'+\beta'$とが互いに対応する．

こうして見るとカントルの無理数論とデデキントの無理数論とは表現の上では相異っているけれども実質的には同一と考えられる．

第6章　一般集合論

集合論の一般をできるだけ平易にかつ厳格に解説しよう．

1. 集合の意味

集合の概念をカントルはつぎのように述べている．集合とはわれわれの直観または思惟の対象である互いに相異なるかつ確定した物を——これを集合の要素と名づける——一つの全体に総括したものをいう．

'相異' および '確定' の二語はさらに説明を要する．'相異' は二つの物をとると同一であるかまたは相異なるかを決定できることかつ集合のすべての要素は互いに相異なっていることを意味する．'確定' はある物が与えられたとき，これが集合の要素であるか否かを少なくとも(概念上)決定できることを意味する．以上の決定ができれば集合は存在するものと考える．

集合の例　自然数 $1, 2, \cdots, k$；すべての自然数；すべての有理数；すべての実数等いずれも集合を作る[1]．

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \qquad (a_0, a_1, \cdots, a_n \text{は整数},\ a_0 \neq 0)$$

という形の代数方程式の根となることができる実数を**代数的数**といい，それ以外の実数を**超越数**という．

一つの数が与えられたときこれが超越数であるか否かを実際に決定することはきわめて困難である．例えば $2^\pi, \pi^\pi$ の超越数であるか否かは未だに知られていない．しかしながら一つの数は超越数かまたは代数的数かその一つであるから超越数の集合は存在すると考える．

1) これに反して余り大きくない数の全部というようなものは，いわゆる '確定' でないから集合を作ると考えられない．

真の集合ではないが便宜上全然要素を含まない集合も考える．これを**空集合**といい，記号 $\emptyset$ で表わす．一般に集合を表わすに A, B, C 等の文字を用いて，要素を表わすに a, b, c 等の文字を用いる．集合 A が要素 $a, b, c, \cdots$ 等からなるとき $A=\{a, b, c, \cdots\}$ で表わすことがある．本書ではしばしば a が A の要素であることを $a\in A$，a が A の要素でないことを $a\notin A$ で表わす．

2. 部分集合

われわれの集合の定義によれば，二つの集合 A, B は同じ要素からなるときかつこのときに限って同一である．これを $A=B$ で表わす．

二つの集合 A, B があって，B のおのおのの要素が同時に A の要素であるとき B を A の**部分集合**という．これによれば A は A 自身の部分集合である．B が A の部分集合でしかも B と A とが同じでないとき B を A の**真部分集合**といい，$B\subset A$ で表わす．したがって $B\subseteqq A$ は単に B が A の部分集合であることを表わす．

注意　空集合はすべての集合の部分集合と考える．

A と B とが共通の要素を持たないとき，A と B とは**互いに素**であるという．

例　すべての有理数の集合を B，すべての実数の集合を A とすれば B は A の真部分集合である．A を $0\leqq x\leqq 1$ である実数 x の集合，B を $2\leqq x\leqq 3$ である実数 x の集合とすれば A と B とは互いに素である．

3. 写　　像

二つの集合 A, B があって，B のおのおのの要素 b に対して A の一つの要素 a_b が対応するとき集合 B は集合 A に**写像される**といい，このような対応を集合 B を集合 A に写す**写像**[1]という．なお a_b を b の**像**(要素)，b を a_b の**原像**(要素)，すべての a_b の集合を B の**像集合**という．

1)　くわしくいえば一意的な写像．

特に，B が自然数の集合 $\{1, 2, \cdots, k\}$ であるとき，B の要素に対応する A の要素の全体 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ を A の要素からなる**有限系列**という．B がすべての自然数の集合 $\{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$ であるとき，対応する A の要素の全体 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ を A の要素からなる**無限系列**という．系列に含まれる個々の a_n を**系列の項**という．系列と集合とはきわめて類似しているがつぎの点で相異なる．集合はわれわれの定義によれば，すべての要素は互いに相異なることを必要とするがこれに反して系列は同一の A の要素からなる項をいくつも含み得る——A の同一の要素 a を B のすべての要素に対応させる一つの写像を考えれば，これによって無限系列 $a, a, a, \cdots$ が得られしかも B の像集合はただ一つの A の要素 a からなる．

集合 A の要素が数，点，集合であるとき，それにしたがって数列，点列，集合列という．

つぎに B を $a \leqq x \leqq b$ であるすべての実数 x の集合，A をすべての実数 y の集合とする．B を A に写す一つの写像 φ において x に対応する y を $a \leqq x \leqq b$ で定義された x の**函数**といい，$y = \varphi(x)$ という記号で表わす．

4. 一対一の対応，対等

集合 B を集合 A に写す一つの写像 φ がつぎの条件を満足するものとする．

(1)　B の相異なる要素は A に相異なる像を持つ．

　　すなわち $b \neq b'$ とすれば $a_b \neq a_{b'}$ である．

(2)　A のおのおのの要素は B に原像を持つ．

このとき，A のおのおのの要素 a は B に一つしかもただ一つの原像 b_a を持つから，a に原像 b_a を対応させれば，逆に A を B に写す一つの写像 ψ が定められる．この写像 ψ においても明らかに，

(1)　A の相異なる要素は B に相異なる像を持つ．

(2)　B のおのおのの要素は A に原像を持つ．

このような写像 φ(または ψ)を**一対一の対応**という．換言すれば一対一の対応とは，

A のおのおのの要素にただ一つの B の要素が対応し，逆に B のおのおのの要素にただ一つの A の要素が対応することである．

集合 A と集合 B の間に一対一の対応が存在するとき，A と B とは互いに**対等**であるといい，$A \sim B$ または $B \sim A$ で表わす．

つぎの法則が成立することは容易にわかる．

(i) $A \sim A$,　(ii) $A \sim B$ ならば $B \sim A$,　(iii) $A \sim B$, $B \sim C$ ならば $A \sim C$.

k を任意の定まれる自然数とし，集合 $\{1, 2, \cdots, k\}$ と対等である集合を**有限集合**(または有限個の要素からなる集合)という．有限集合でない集合を**無限集合**という．

集合論では主として無限集合を取り扱うのである．拙著でも有限集合の理論はわかっているものとするのであるが，参考のためにつぎの二つの定理だけを説明しておこう．

1°．A を任意の有限集合とすれば

$$A \sim \{1, 2, \cdots, k\}$$

である自然数 k はただ一つしかない．この k を集合 A の要素の**個数**という．

2°．有限集合 A の空集合でない部分集合 A' はまた有限集合でしかも A' の要素の個数は A のそれよりも大でない．特に A' を A の真部分集合とすれば，A' の要素の個数は A のそれよりも小である．

すべての自然数の集合と対等である集合 A は有限集合でない．集合 A は仮定から

$$\{a_1, a_2, \cdots, a_k, \cdots\} \qquad (\text{いうまでもなく } h \neq k \text{ ならば } a_h \neq a_k)$$

の形で表わされる．仮に有限集合とし，その要素の個数を n とすれば 2° からそのいかなる部分集合($\neq \emptyset$)も有限集合でかつ要素の個数はたかだか n である．しかるに A の部分集合

$$A' = \{a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}\}$$

は自然数の集合 $\{1, 2, \cdots, n+1\}$ と対等になる．これは不合理である．

すべての自然数の集合と対等である集合を**可付番無限集合**という．

例 すべての自然数の集合を A，すべての偶数の集合を B とする．

$$A = \{1, 2, 3, 4, \cdots, n, \cdots\},$$

$$B = \{2, 4, 6, 8, \cdots, 2n, \cdots\}.$$

A のおのおのの要素 n に B の要素 $2n$ を対応させれば，A と B の間に一対一の対応が付けられる．ゆえに B もまた可付番無限集合である．同様にすべての奇数の集合も可付番無限集合である．この例は無限集合は自己の真部分集合と対等になり得ることを示している[1]．

定理1 任意の無限集合は必ず可付番無限部分集合を持つ．

証明 A を無限集合とする．A から任意に要素を取り，これを a_1 とする．つぎに A から要素 a_1 を取り去った残りから任意に要素を取り，これを a_2 とする．この方法を無限に続けることができる．もしそうでないときは A は n をある自然数として $\{1, 2, \cdots, n\}$ と対等になるからである．A から取り出した要素の全体 $a_1, a_2, \cdots$ は明らかに A の一つの可付番無限部分集合を作る．

定理2 任意の無限集合は必ず自己と対等な真部分集合を持つ．

証明 前定理によって無限集合 A は可付番無限な部分集合 A' を持つ：

$$A' = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots\}.$$

A' に属さない A の要素の全体の集合を A''[2] とする．

つぎに A' から要素 a_1 を取り去った残りの集合を B' とする：

$$B' = \{a_2, a_3, \cdots, a_{n+1}, \cdots\}.$$

B' と A'' の要素のすべての集合を B とすれば，明らかに B は A の真部分集合である．つぎに $a_n \in A$ に $a_{n+1} \in B$ を対応させ，A'' が空集合でないとき，A''

1) 有限集合ではこのようなことはあり得ない．

2) A'' は空集合のときもある．

のおのおのの要素にそれ自身を対応させれば，A と B の間に一対一の対応が付けられる．

注意 定理2の主張は無限集合と有限集合との間の著しい差異を示している．

5. 和集合，積集合，補集合

集合系列[1)]

$$A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_k,\ \cdots$$

が与えられたとき，A_k の少なくとも一つに含まれる要素のすべての集合 V をこの系列の**和集合**(または**合併集合**)といい，すべての A_k に共通に含まれる要素のすべての集合 D をこの系列の**積集合**(または**共通集合**)という．

和集合 V は一般に

$$V=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k\cup\cdots \quad \text{または} \quad V=\bigcup_k A_k,$$

特に A_k のいずれの二つも互いに素であるとき

$$V=A_1+A_2+\cdots+A_k+\cdots,$$

積集合 D は

$$D=A_1A_2\cdots A_k\cdots,\quad D=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_k\cap\cdots \quad \text{または} \quad D=\bigcap_k A_k$$

で表わす．

つぎにさらに一般の場合の定義を述べる．

$\mathfrak{A}$ は要素自身が集合 A である集合とし，B は任意の集合とする．いま B を $\mathfrak{A}$ に写像する一つの写像 φ があって，B のおのおのの要素 b に $\mathfrak{A}$ の要素 A_b が対応するものとする．写像 φ によって B の要素に対応する A_b の全体から作られる**和集合**および**積集合**はつぎのように定義する：

A_b の少なくとも一つに含まれる要素のすべての集合 V を和集合といい，すべての A_b に共通に含まれる要素のすべての集合 D を積集合という．

$B=\{b',b'',b''',\cdots\}$ とすれば，和集合 V は一般に

1) 有限または無限．

$$V=A_{b'}\cup A_{b''}\cup A_{b'''}\cup\cdots \quad \text{または} \quad V=\bigcup_B A_b,$$

特に $A_{b'}, A_{b''}, A_{b'''},\cdots$ のいずれの二つも互いに素であるとき

$$V=A_{b'}+A_{b''}+A_{b'''}+\cdots,$$

積集合 D は

$$D=A_{b'}A_{b''}A_{b'''}\cdots,\quad D=A_{b'}\cap A_{b''}\cap A_{b'''}\cap\cdots \quad \text{または} \quad D=\bigcap_B A_b$$

で表わす.

明らかに B が集合 $\{1,2,\cdots,k,\cdots\}$ であるときは前の定義となる.

注意 すべての A_k に共通な要素がないとき D は空集合 $\emptyset$ となる. ゆえに A_1 と A_2 が互いに素であることを $A_1A_2=\emptyset$ で表わすことができる.

$B\subseteqq A$ であるとき B に含まれないすべての A の要素から成る集合を A に対する B の**補集合**といい, $A-B$ で表わす. $B=A$ のとき $A-B$ は空集合である.

和集合および積集合に関して

(1) $A\cup B=B\cup A,\qquad A+B=B+A$

(2) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C,\qquad A+(B+C)=(A+B)+C$

(3) $C(A\cup B)=CA\cup CB,\qquad C(A+B)=CA+CB$

が成立する.

注意 $$A+(B+C)=(A+B)+C$$

の左辺は $BC=\emptyset$ かつ $A(B+C)=\emptyset$ のときに限って意味を持つ. $A(B+C)=\emptyset$ ならば $AB=\emptyset$, $AC=\emptyset$ である. $AB=\emptyset$ より $A+B$ は意味を持ち, $AC=\emptyset$ と $BC=\emptyset$ より $(A+B)C=\emptyset$, したがって右辺は意味を持つ. 同様に右辺が意味を持つとき左辺も意味を持つ. これに反して

$$C(A+B)=CA+CB$$

は左辺が意味を持つとすれば必ず右辺も意味を持つが, 逆に右辺が意味を持つからといって必ずしも左辺は意味を持たない. これだけ注意すれば(1)-(3)の成立することはわれわれの定義から容易に証明できる.

定理1 $$A\cup B=A+(B-AB).$$

証明 $B-AB$ は B から A と共通な要素をとり去ったものであるから右辺は意味を持つ．つぎに右辺のおのおのの要素は左辺に含まれる（明白）．$x \notin A$, $x \in B$ とすれば $x \notin AB$, したがって $x \in B-AB$. ゆえに左辺のおのおのの要素は右辺に含まれる．

定理 2 $$V = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots$$
は適当に $B_n \subseteqq A_n$ $(n=1, 2, \cdots)$ を定めて
$$V = B_1 + B_2 + \cdots + B_n + \cdots$$
と表わすことができる．

証明 まず $B_1 = A_1$ とし $B_2 = A_2 - A_2B_1$ とおけば，$B_2 \subseteqq A_2$ かつ $B_1B_2 = \emptyset$. つぎに $B_3 = A_3 - A_3(B_1 + B_2)$ とおけば，$B_3 \subseteqq A_3$ かつ $B_1B_3 = \emptyset$, $B_2B_3 = \emptyset$.

これを続けて行けば一般に
$$B_n = A_n - A_n(B_1 + B_2 + \cdots + B_{n-1}),$$
$$B_n \subseteqq A_n \quad \text{かつ} \quad B_1, B_2, \cdots, B_n \quad \text{は互いに素.}$$

B_n の和集合を U で表わす．$V=U$ を証明するには U のおのおのの要素が V に属することは明らかであるから，V のおのおのの要素が U に属することをいえばよい．V の任意の要素 x をとり x を含む A_n $(n=1, 2, \cdots)$ の最初のものを A_k とすれば，

$k=1$ のときは $A_1 = B_1$. ゆえに
$$x \in U.$$

$k \neq 1$ のときは $x \notin A_1$, $\cdots$, $x \notin A_{k-1}$, しかし $x \in A_k$. したがって $x \notin B_1$, $\cdots$, $x \notin B_{k-1}$ であるが $x \in A_k$. ゆえに
$$x \in B_k = A_k - A_k(B_1 + B_2 + \cdots + B_{k-1}).$$
ゆえに
$$x \in U.$$

無限集合系列
$$A_1, \quad A_2, \quad \cdots, \quad A_n, \quad \cdots$$

が与えられたとき，

無限に多くの項に含まれる[1]要素のすべての集合を**最大極限集合**といい，ほとんどすべての項に含まれる[2]要素のすべての集合を**最小極限集合**という．

最大および最小極限集合をそれぞれ $\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$ および $\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n$ で表わす．定義から $\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n \subseteqq \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$ は明らかである．

特に $\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$ であるときこれを単に**極限集合**といい，$\lim_{n\to\infty} A_n$ で表わしかつこの系列 A_n は収束するという．

定理 3 $A_1 \subseteqq A_2 \subseteqq \cdots \subseteqq A_n \subseteqq \cdots$ （単調増加）

とすれば，系列 A_n は収束してかつ

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots.$$

$$A_1 \supseteqq A_2 \supseteqq \cdots \supseteqq A_n \supseteqq \cdots \quad \text{（単調減少）}$$

とすれば，系列 A_n は収束してかつ

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A_1 A_2 \cdots A_n \cdots.$$

証明 単調増加の場合だけを証明する．$x \in \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$ とすれば，$x \in A_n$ である n は無限に多くある．その一つを k とすれば

$$x \in A_k \subseteqq A_{k+1} \subseteqq A_{k+2} \subseteqq \cdots.$$

ゆえに

$$x \in \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n.$$

ゆえに

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n \subseteqq \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n.$$

しかるに本来 $\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n \supseteqq \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n$ であるから

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n.$$

---

1) 自然数 k をいかに大きくとっても，$x \in A_n$，$n \geqq k$ である n が存在するとき x は無限に多くの項に含まれるという．

2) ある自然数 k より大なるすべての n に対して $x \in A_n$ であるとき，x はほとんどすべての項に含まれるという．

$\lim_{n\to\infty} A_n = A_1 \cup A_2 \cup \cdots$ は容易にわかる．

定理 4 $V_n = A_n \cup A_{n+1} \cup \cdots, \quad D_n = A_n A_{n+1} \cdots$

とおけば，

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \lim_{n\to\infty} V_n, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \lim_{n\to\infty} D_n.$$

証明 $x \in \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$ とすれば，x は V_n のすべてに属するから $x \in V_1 V_2 \cdots$ である．つぎに $x \notin \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$ とすれば，ほとんどすべての V_n について $x \notin V_n$ であるからいうまでもなく $x \notin V_1 V_2 \cdots$ である．ゆえに

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = V_1 V_2 \cdots.$$

同様にして

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = D_1 \cup D_2 \cup \cdots.$$

系列 V_n は単調減少，系列 D_n は単調増加であるから定理 3 によって $\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \lim_{n\to\infty} V_n$，$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \lim_{n\to\infty} D_n$ である．

定理 5 $V_{n,k} = A_n \cup A_{n+1} \cup \cdots \cup A_{n+k}, \quad D_{n,k} = A_n A_{n+1} \cdots A_{n+k}$

とおけば

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \lim_{n\to\infty}(\lim_{k\to\infty} V_{n,k}), \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \lim_{n\to\infty}(\lim_{k\to\infty} D_{n,k}).$$

証明 定理 4 における V_n, D_n について明らかに

$$V_n = V_{n,1} \cup V_{n,2} \cup \cdots \cup V_{n,k} \cup \cdots, \quad D_n = D_{n,1} D_{n,2} \cdots D_{n,k} \cdots$$

が成立する．n を固定すれば $k=1, 2, \cdots$ に対して $V_{n,k}$ は単調増加，$D_{n,k}$ は単調減少であるから，$V_n = \lim_{k\to\infty} V_{n,k}$，$D_n = \lim_{k\to\infty} D_{n,k}$ となって定理 4 によってわれわれの主張が得られる．

6. 結合集合，配置集合

$\mathfrak{A}$ は要素自身が集合 A である集合とし，B は任意の集合とする．いま B を $\mathfrak{A}$ に写像する一つの写像 φ があって，B のおのおのの要素 b に $\mathfrak{A}$ の要素 A_b が対

応するものとする．写像φによってBの要素に対応するA_bの全体を

$$(A_b, A_{b'}, A_{b''}, \cdots)$$

で表わす．$A_b, A_{b'}, A_{b''}, \cdots$ のおのおのから一つずつ要素$a_b, a_{b'}, a_{b''}, \cdots$ をとれば一つの組

$$(a_b, a_{b'}, a_{b''}, \cdots)$$

が得られる．相異なるすべての組$(a_b, a_{b'}, a_{b''}, \cdots)$の集合を$A_b$全体の**結合集合**という．ここに二つの組が同一とは$A_b, A_{b'}, A_{b''}, \cdots$ のおのおのからとった要素が互いに一致するときかつこのときに限られるものとする．

例 n個の集合$A_1, A_2, \cdots, A_n$の結合集合は相異なるすべての組$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$の集合である．ただし$a_k \in A_k$, $k=1, 2, \cdots, n$とする．

例 無限集合系列$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ の結合集合は相異なるすべての組$(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$の集合である．ただし$a_k \in A_k$, $k=1, 2, \cdots$ とする．

BをAに写像する一つの写像φにおいて，Bのおのおのの要素bの像をa_bとし，これらa_bの全体を組という．一つの写像φに相当して一つの組P_φが得られかつ相異なる写像から相異なる組が得られる：$\varphi \neq \varphi'$とすれば$P_\varphi \neq P_{\varphi'}$である．

このような組P_φのすべての集合を**配置集合**といい，A^Bで表わす．

例 Bをすべての自然数の集合$\{1, 2, \cdots\}$とする．Aの要素からなる無限系列$(a_1, a_2, \cdots)$のすべての集合はA^Bである．

注意 Aの要素からなる無限系列とはBのおのおのの要素にAの要素を一つずつ配置したものと考えられる．

7. 濃　度

可付番無限でない無限集合が存在する．

定理 区間$0<x\leqq 1$のすべての実数の集合は可付番無限でない集合である．

証明 $0<x\leqq 1$のおのおのの数xはただ一通りに無限小数

$$(*)\qquad 0.a_1a_2a_3\cdots$$

に展開できる．ただし有限小数は 9 を周期とする無限小数でおき換えるものとする（たとえば 0.5=0.4999…，1=0.9999…）．

こうすれば，$0<x\leqq 1$ のすべての実数の集合とすべての無限小数 $0.a_1a_2a_3\cdots$ の集合と対等になる[1]．

いま (*) の形の無限小数からなる任意の可付番無限集合 A

$$\begin{array}{ll}
(1) & 0.a_{11}a_{12}a_{13}\cdots \\
(2) & 0.a_{21}a_{22}a_{23}\cdots \\
(3) & 0.a_{31}a_{32}a_{33}\cdots \\
\cdots & \cdots\cdots \\
(k) & 0.a_{k1}a_{k2}a_{k3}\cdots \\
\cdots & \cdots\cdots
\end{array}$$

を考える．A に属さない無限小数

$$0.b_1b_2b_3\cdots$$

の存在を証明すればよい．

対角線に沿った数字からなる

$$0.a_{11}a_{22}a_{33}\cdots$$

に対して $a_{kk}=1$ であるとき $b_k=2$，$a_{kk}\neq 1$ であるとき $b_k=1$ とすれば，この無限小数 $0.b_1b_2b_3\cdots$ は確かに A に属さない．なぜかといえば，k 番目の無限小数とは $b_k\neq a_{kk}$ であるから相異なる．

この証明に用いた方法は**対角線の方法**と呼ばれ，集合論ではしばしば用いられる．

集合 A と集合 B が対等であるとき同じ**濃度** (Mächtigkeit) を持つといい，対等でないとき相異なる濃度を持つという．

注意　初等幾何学の直線の平行に関してつぎの三法則

1) 第 4 章第 27 節参照．

(i) $a//a$,　(ii) $a//b$ ならば $b//a$,　(iii) $a//b$, $b//c$ ならば $a//c$

が成立すること(集合の対等に関しても同じ法則が成立することはすでに述べておいた), また直線 a と直線 b が平行であるとき同じ**方向**を持つといい, 平行でないとき相異なる方向を持つということは諸君のよく知るところである. 集合の対等と濃度の関係はちょうど直線の平行と方向との関係のようなものである.

集合の濃度を表わすのに一般にドイツ文字 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ 等を用いる. また集合 A の濃度を $\overline{\overline{A}}$ で表わすこともある. 二つの有限集合は要素の個数が等しいときかつこのときに限って対等になる. よって有限集合 A が n 個の要素からなるとき A の濃度を n で表わす. 空集合の濃度を0で表わす. 可付番無限集合を $\aleph_0$[1] で表わす. また $0<x\leqq 1$ であるすべての実数の集合の濃度を $\aleph$ で表わし, $\aleph$ を**連続体**(Kontinuum)の濃度という. いま証明した定理によって $\aleph_0 \neq \aleph$ である.

注意　集合 A, B の濃度をそれぞれ $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ としたとき, $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}$ とは A と B が対等である, $\mathfrak{a}\neq\mathfrak{b}$ とは A と B が対等でないという他のいい表わし方である.

8. ベルンシュタインの定理

理論および応用上きわめて重要なベルンシュタイン(F. Bernstein)の**対等定理**を述べるにさきだってつぎの準備をする.

補助定理　二つの集合系列 A_k および B_k があって,

(1)　A_k のいずれの二つも互いに素, B_k のいずれの二つも互いに素.

(2)　$$A_k \sim B_k \qquad (k=1,2,\cdots)$$

とすれば

$$A = A_1+A_2+\cdots \sim B = B_1+B_2+\cdots$$

である.

証明　(2)によれば, A_k を B_k に一対一に写像する写像 φ_k がある. おのお

1)　$\aleph$ は'アレフ'と読む.

ののa∈Aに対してaを含むA_kは一つしかもただ一つある．$a\in A$, $a\in A_k$であるときφ_kによるaの像b_a(B_kの要素)をaに対応させればAとBとの間に一対一の対応が付けられる．なぜかといえば，

1°. a, a' $(a\neq a')$が同一のA_kに属するとき，明らかに$b_a\neq b_{a'}$.

a, a' $(a\neq a')$が相異なるA_h, A_kに属するとき，$b_a=b_{a'}$とすればB_hとB_kは互いに素という仮定に反する．

2°. Bのおのおのの要素bは明らかにAに原像を持つ．

定理 (ベルンシュタイン)二つの集合A, Bがあるとき，AはBの部分集合B_1と対等，BはAの部分集合A_1と対等とすれば，AとBとは互いに対等である．

証明 $A_1=A$または$B_1=B$のときは定理は明らかであるから

$$A \sim B_1,\ B_1 \subset B \quad \text{かつ} \quad B \sim A_1,\ A_1 \subset A$$

と仮定する．$B\sim A_1$から，BはA_1に一対一に写像され，したがってB_1はA_1の真部分集合A_2に写像される．ゆえに$B_1\sim A_2$．しかるに$A\sim B_1$．ゆえに

$$A \sim A_2, \qquad A_2 \subset A_1 \subset A.$$

よってわれわれの証明には

$$\underline{A\sim A_2,\ A_2\subset A_1\subset A\ \text{ならば}\ A\sim A_1\ \text{である}}$$[1]

ことを証明すれば十分である．まず$A\sim A_2$からAはA_2に一対一に写像される．この写像φによって

$$A_1\text{は}A_3,\ A_2\text{は}A_4,\ A_3\text{は}A_5,\ \cdots$$

に写像されかつ

$$A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset A_4 \supset A_5 \supset \cdots \qquad (A=A_0\text{とおく})$$

が成立する．つぎに無限集合系列A_kの積集合を

$$D = A_0A_1A_2\cdots$$

とすれば，集合A_0およびA_1はつぎの形に表わされる．

1) 二つの対等な集合の間にある一つの集合はこれらと対等である．

$$A_0 = D+(A_0-A_1)+(A_1-A_2)+(A_2-A_3)+(A_3-A_4)+\cdots$$[1],

$$A_1 = D \qquad\qquad\qquad +(A_1-A_2)+(A_2-A_3)+(A_3-A_4)+\cdots.$$

最初の場合だけを証明する[2]. 右辺のおのおのの要素が A_0 に含まれることは明らかであるから, A_0 のおのおのの要素が右辺に含まれることをいえばよい. $a\in A_0$ とすれば, a はすべての $A_k\,(k=0,1,2,\cdots)$ に含まれるか(この場合は $a\in D$)または a を含まない最初の A_n がある. したがって

$$a\in A_{n-1},\ a\notin A_n \quad \text{から} \quad a\in(A_{n-1}-A_n).$$

写像 φ によって

$$(A_0-A_1)\sim(A_2-A_3),$$
$$(A_2-A_3)\sim(A_4-A_5),$$
$$\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots$$
$$(A_{2k-2}-A_{2k-1})\sim(A_{2k}-A_{2k+1}),$$
$$\cdots\cdots$$

であることは容易にわかり, かつ, D および $A_{2k-1}-A_{2k}\,(k=1,2,\cdots)$ はそれ自身と対等であるから補助定理によって $A_0\sim A_1$ である.

注意 読者諸君の理解しやすいように線を引いて A_0 と A_1 の対応を示そう.

$$A_0 = D+(A_0-A_1)+(A_1-A_2)+(A_2-A_3)+(A_3-A_4)+(A_4-A_5)+\cdots,$$

$$A_1 = D \qquad\qquad +(A_1-A_2)+(A_2-A_3)+(A_3-A_4)+(A_4-A_5)+\cdots.$$

ついでながら $A\sim B$ とすれば, $A\sim B_1$, $B_1=B$, かつ, $B\sim A_1$, $A_1=A$ である. 特に A, B が無限集合のときは第4節定理2によって

$$A_1\sim A,\ A_1\subset A \quad \text{および} \quad B_1\sim B,\ B_1\subset B$$

である A_1, B_1 が存在するから

---

1) A_0, A_1 の右辺が意味を持つことは容易にわかる.

2) 後の場合もまったく同様.

$$A \sim B_1,\ B_1 \subset B \quad かつ \quad B \sim A_1,\ A_1 \subset A.$$

9. 濃度の比較

二つの濃度の相等および不等についてはすでに述べてある．つぎに濃度が不等の場合にこれに大小を定義できるかどうかという問題を考えて見る．

二つの集合 A, B の部分集合(集合自身をも含む)を代表的にそれぞれ A_1, B_1 で表わすときつぎの四つの場合が考えられる．

(1)　B と対等な A_1 があって，A と対等な B_1 がある．

(2)　B と対等な A_1 があって，A と対等な B_1 がない．

(3)　B と対等な A_1 がなく，A と対等な B_1 がある．

(4)　B と対等な A_1 がなく，A と対等な B_1 がない．

これら四つの場合は起るべきすべてを尽し，いずれの二つも互いに排斥する．集合 A, B の濃度をそれぞれ $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ とするとき，

(1)の場合はベルンシュタインの定理から $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}$ である．

(2)の場合は $\mathfrak{a}>\mathfrak{b}$ と定義する．

(3)の場合は $\mathfrak{a}<\mathfrak{b}$ と定義する．

(4)の場合は $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}$，$\mathfrak{a}>\mathfrak{b}$，$\mathfrak{a}<\mathfrak{b}$ のいずれでもない．換言すれば $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ とが比較できない場合である．

(4)の場合の起らないことが証明できれば**二つの濃度 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ には**

$$\text{(i)}\ \mathfrak{a}=\mathfrak{b}, \qquad \text{(ii)}\ \mathfrak{a}>\mathfrak{b}, \qquad \text{(iii)}\ \mathfrak{a}<\mathfrak{b}$$

のいずれか一つが成立しかつこのいずれの二つも両立しないことになる．

ここで(4)の場合の不成立を証明することはできないが，後に述べる**整列可能定理**(Wohlordnungssatz)によれば必然の結果としてこれが証明できる．

注意　二つの有限集合 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$，$B=\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ において，a_1 と b_1，a_2 と b_2，… と順次に一対一に対応させて行き，一方の要素が尽きる迄これを続けることができる．よってともに有限集合の場合は(4)の場合は起らない．

一つが有限，他が無限集合の場合も同様で，前者の濃度は後者よりも小である．

第7節によって

$$\aleph_0 < \aleph$$

である．

A が B の部分集合と対等とすれば $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}$ であるから，ベルンシュタインの定理はつぎのように簡単に述べることができる．

定理1　$\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}$，$\mathfrak{a} \geqq \mathfrak{b}$ ならば $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ である．

つぎの定理は演習問題として証明は読者諸君にゆずる．

定理2　$\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$，$\mathfrak{b} < \mathfrak{c}$ ならば $\mathfrak{a} < \mathfrak{c}$ である．

10. 濃度の和，積，ベキ

A. 和　二つの濃度 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ が与えられたとき，濃度 $\mathfrak{a}$ を持つ集合 A と濃度 $\mathfrak{b}$ を持つ集合 B をこれらが**互いに素**であるようにえらび，和集合 $A+B$ の濃度で和 $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ を定義する．この定義によれば，$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ が与えられると和 $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ は集合 A, B のとり方には無関係に一意的に定まる(第8節補助定理参照)．

例　すべての自然数の集合は $\{1, 2, \cdots, n\}+\{n+1, n+2, \cdots\}$ と書くことができる．ゆえに $n+\aleph_0=\aleph_0+n=\aleph_0$，またすべての自然数の集合はすべての偶数の集合およびすべての奇数の集合の和であるから $\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$ である．

一般の場合は，

B を任意の集合とし，おのおのの $b \in B$ に濃度 $\mathfrak{a}_b$ が対応するとき，すべての $\mathfrak{a}_b$ の和は，おのおのの b に対して濃度 $\mathfrak{a}_b$ を持つ集合 A_b をこれらのどの二つも互いに素であるように定め，すべての A_b の和集合の濃度で定義する．この場合においても $\mathfrak{a}_b$ の和は A_b の定め方には無関係である．

B. 積　二つの濃度 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ が与えられたとき，濃度 $\mathfrak{a}$ を持つ集合 A と濃度 $\mathfrak{b}$ を持つ集合 B(互いに素である必要はない)をえらび，それらの結合集合の濃度で積 $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ を定義する．この定義によれば $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ が与えられると積 $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ は集合 A, B の

とり方には無関係に一意的に定まる.

なぜかといえば，$A_k \sim B_k\ (k=1,2)$ とすれば，A_k を B_k に一対一に写像する写像 φ_k がある. φ_k による A_k のおのおのの要素 a_k の B_k の中に持つ像を b_k とし，A_1 と A_2 の結合集合のおのおのの要素 (a_1, a_2) に B_1 と B_2 の結合集合の要素 (b_1, b_2) を対応させれば，両結合集合の間に一対一の対応が付けられるからである.

一般に，

B を任意の集合とし，おのおのの $b \in B$ に濃度 $\mathfrak{a}_b$ が対応するときすべての $\mathfrak{a}_b$ の積は，おのおのの b に対して濃度 $\mathfrak{a}_b$ を持つ集合 A_b を定め，すべての A_b の結合集合の濃度で定義する. この場合においても $\mathfrak{a}_b$ の積は集合 A_b のえらび方には無関係である.

C. ベキ　二つの濃度 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ が与えられたとき，濃度 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ を持つ集合 A, B をえらび，配置集合 A^B の濃度でベキ $\mathfrak{a}^\mathfrak{b}$ を定義する. この定義によれば $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ が与えられるとベキ $\mathfrak{a}^\mathfrak{b}$ は集合 A, B のえらび方には無関係に一意的に定まる. なぜならば $A \sim C$, $B \sim D$ とすれば $A^B \sim C^D$ であるからである.

例　$\overline{\overline{A}} = \mathfrak{a}$ である A の要素からなるすべての無限系列の集合の濃度は $\mathfrak{a}^{\aleph_0}$ である.

例　$\{0, 1, 2, \cdots, 9\}$ の要素からなるすべての無限系列の集合の濃度は $10^{\aleph_0}$ である. 換言すれば $0.a_1a_2a_3\cdots$ の形のすべての小数の集合の濃度は $10^{\aleph_0}$ である. 同様に $0.b_1b_2b_3\cdots$ の形のすべての二進小数の集合の濃度は $2^{\aleph_0}$ である.

注意　濃度のベキは積の特別の場合として定義することもできる. しかしながら配置集合の濃度で定義する方が簡単かつ応用上に役立つ.

われわれの濃度の和，積，ベキに関してつぎの計算法則が成立する. いずれも定義から直接に証明できる.

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = \mathfrak{b}+\mathfrak{a}, \qquad \mathfrak{a}+(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a}+\mathfrak{b})+\mathfrak{c};$$

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\mathfrak{a}, \qquad \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a}\mathfrak{b})\mathfrak{c}, \qquad (\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\mathfrak{c}+\mathfrak{b}\mathfrak{c};$$

$$\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a}^{\mathfrak{c}}, \qquad (\mathfrak{a}\mathfrak{b})^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{c}}\mathfrak{b}^{\mathfrak{c}}, \qquad \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} = (\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}})^{\mathfrak{c}},$$

$\mathfrak{b} \geqq \mathfrak{b}'$ とすれば

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b} \geqq \mathfrak{a}+\mathfrak{b}', \qquad \mathfrak{a}\mathfrak{b} \geqq \mathfrak{a}\mathfrak{b}', \qquad \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} \geqq \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}'}, \qquad \mathfrak{b}^{\mathfrak{a}} \geqq \mathfrak{b}'^{\mathfrak{a}}.$$

11. 諸定理

無限集合は必ず可付番無限である部分集合を持つから，

定理1 $\aleph_0$ は無限集合の最小の濃度である．

定理2 可付番無限集合 A の無限部分集合の濃度は $\aleph_0$ である．

証明 $B \subseteqq A$ より $\overline{\overline{B}} \leqq \overline{\overline{A}} = \aleph_0$.

他方において B は無限であるから $\overline{\overline{B}} \geqq \aleph_0$ である．ゆえに $\overline{\overline{B}} = \aleph_0$.

注意 今後，有限および可付番無限である集合を総称して**可付番集合**または**高々可付番無限な集合**という．

定理3 A を可付番，B を無限集合とすれば，$A \cup B$ は B と同じ濃度を持つ．

証明 B は無限であるから

$$B = A' + B', \qquad \overline{\overline{A'}} = \aleph_0$$

と表わされる．$C = A - AB$ とすれば明らかに $\overline{\overline{C}} \leqq \aleph_0$.

$$A \cup B = (A - AB) + B = C + (A' + B') = (C + A') + B',$$

$$n + \aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \quad \text{より} \quad C + A' \sim A' \qquad (n \text{ は有限の濃度}).$$

ゆえに

$$A \cup B = (C + A') + B' \sim A' + B' = B.$$

定理4 自然数からなる m 項系列

$$a = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$$

のすべての集合 A の濃度は $\aleph_0$ である．したがって $\aleph_0{}^m = \aleph_0$.

証明 k を任意の自然数とする．k より大なる自然数を項に持たない A の要素 a の個数は k^m である．ゆえに少なくとも一つ k を項に持ちかつ k より大なる自然数を項に持たない A の要素 $a^{(k)}$ の個数 n_k はちょうど $k^m - (k-1)^m$ に等

しい．このような $a^{(k)}$ のすべての集合を A_k とすれば

$$A_k=\{a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \cdots, a_{n_k}^{(k)}\}$$

と表わされる．明らかに

$$A=A_1+A_2+\cdots+A_k+\cdots.$$

A の要素 a が $a_l^{(k)}$ に等しいとき，これに $n_1+n_2+\cdots+n_{k-1}+l$ という番号を付ければ，A のすべての要素に番号が付くから A の濃度は $\aleph_0$ である．

定理5　集合の有限または無限系列

$$A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_k,\ \cdots$$

があって，そのおのおのの A_k が可付番であるときは，

$$V=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k\cup\cdots$$

も可付番である．

証明　$B_k\subseteqq A_k\,(k=1,2,\cdots)$ を適当にとれば

$$V=B_1+B_2+\cdots+B_k+\cdots$$

と表わすことができるから，結局 A_k のいずれの二つも互いに素な場合に定理を証明すれば十分である．A_k の可付番より

$$A_k=\{a_{k_1}, a_{k_2}, a_{k_3}, \cdots, a_{k_h}, \cdots\}$$

と表わされる．おのおのの a_{k_h} に組 (k,h) を対応させれば V は自然数からなる二項系列の集合の部分集合と対等になる．ゆえに $\overline{\overline{A}}\leqq\aleph_0$.

注意　この定理の意味を，

可付番集合の可付番個の和は可付番であるともいう．したがって濃度でいえば，$\mathfrak{a}_k\leqq\aleph_0$ である $\mathfrak{a}_k$ の可付番個の和は $\leqq\aleph_0$ である．

ここで点集合についての言葉を説明しておこう．直線上の点 P は (x)，平面上の点 P は (x,y) といわゆる点 P の座標で表わされる．そこで形式的に実数からなる n 項系列 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を**点**と呼び，点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ のすべての集合を n **次元空間**と名付ける．

点 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ のおのおのの座標 x_k が整数のときは**格子点**，有理数のと

きは**有理点**という．なお $a_k<x_k<b_k\,(k=1,2,\cdots,n)$ を満足する点 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ の集合を n **次元空間の矩形**(または**長方形**)という．

定理4および定理5の系として定理6-9が得られる．

定理6 平面上のすべての格子点の集合は可付番である．n 次元空間のすべての格子点の集合も同様である．

定理7 すべての有理数の集合は可付番無限集合である．

証明 正の有理数のすべての集合 A が濃度 $\aleph_0$ を持つことを示せば十分である．A のおのおのの要素 r は x, y を互いに素な自然数とし $r=x/y$ と表わすことができる．よっておのおのの r にこの組 (x, y) を対応させれば A は自然数からなるすべての二項系列の部分集合と対等になる．他方において A は無限集合であるから $\overline{\overline{A}}=\aleph_0$ である．

注意 a, b を任意の実数とすれば $a<x<b$ である有理数 x は無限に多く存在する．ゆえに任意の区間 $a<x<b$ における有理数 x のすべての集合は濃度 $\aleph_0$ を持つ．

$\aleph_0{}^n=\aleph_0$ から，

定理8 n 次元空間におけるすべての有理点の集合は濃度 $\aleph_0$ を持つ．

定理9 すべての代数的数の集合 A は濃度 $\aleph_0$ を持つ．

証明 代数的数は方程式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0 \qquad (a_k \text{ は整数},\ a_0>0)$$

の根となり得る実数である．

$$h=n+a_0+|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$$

をこの方程式の高度という．明らかに高度は自然数である．高度 h を持つ方程式の個数は有限，したがって高度 h である方程式の根となり得る実数の全体は有限個である．定理5によって確かに $\overline{\overline{A}}\leqq\aleph_0$ である．他方において，A は無限集合であるから濃度はちょうど $\aleph_0$ である．

定理10 直線上の，いずれの二つも共通点を持たない線分の集合は可付番で

ある.

証明　おのおのの線分に対して，それに属する任意の有理点をとり，これをその線分に対応させれば，この集合は有理数の集合の部分集合と対等になるから可付番である.

定理 11　すべての実数の集合(したがって数直線上のすべての点の集合)は濃度 $\aleph$ を持つ.

証明　　A： $0<x<1$ であるすべての実数 x の集合，

B： $a<y<b$ であるすべての実数 y の集合

とすれば，$x=\dfrac{y-a}{b-a}$ という函数によって $A\sim B$.

したがって定理 3 によれば任意の区間 $a<x<b$, $a\leqq x<b$, $a<x\leqq b$, $a\leqq x\leqq b$ はいずれも濃度 $\aleph$ を持つ. 特に B を $-1<y<1$ であるすべての実数 y の集合とし，C をすべての実数 z の集合とすれば，函数 $z=\dfrac{y}{1-|y|}$ によって $B\sim C$.
ゆえに $\overline{\overline{C}}=\aleph$.

なお容易に

$$n+\aleph=\aleph_0+\aleph=\aleph+\aleph=n\aleph=\aleph_0\aleph=\aleph$$

を証明することができる. これは諸君にゆずる.

$\aleph_0<\aleph$ であることはわかったが $\aleph$ は $\aleph_0$ のつぎに大きい濃度であろうか. 換言すれば，$\aleph_0$ と $\aleph$ の間に他の濃度が存在するかどうかという問題はいまだに解決がついていない. これは有名な**連続体問題**(Kontinuumproblem)と呼ばれるものである.

定理 12　すべての無理数の集合およびすべての超越数の集合はいずれも濃度 $\aleph$ を持つ.

証明　すべての有理数の集合を A，すべての無理数の集合を B，すべての実数の集合を C とすれば，明らかに

$$A+B=C.$$

A は可付番，B は無限集合であるから $\overline{\overline{B}}=\overline{\overline{C}}$ である(定理 3). しかるに $\overline{\overline{C}}=\aleph$.

ゆえに $\overline{\overline{B}}=\aleph$[1].

定理 13 $$\aleph^2=\aleph.$$

証明 平面上に直交する x 軸，y 軸をとり，正方形

$$0<x\leqq 1,\quad 0<y\leqq 1$$

の点 $P(x,y)$ の集合を A とする．A の一点 P のおのおのの座標はただ一通りに無限小数に展開できる：

$$x=0.a_1a_2a_3\cdots,\quad y=0.b_1b_2b_3\cdots.$$

いまこれら二つの無限小数から互に交数字をとり無限小数 $0.a_1b_1a_2b_2a_3b_3\cdots$ を作り，これの表わす実数を点 P に対応させる．A のおのおのの点 P に対してこのような数を対応させれば，相異なる点には相異なる実数が対応するから，A はすべての実数の集合の部分集合と対等になる．ゆえに $\overline{\overline{A}}\leqq\aleph$ である．他方において正方形の一辺 A_1: $0<x\leqq 1$，$y=1$ は明らかに $A_1\subset A$ かつ $0<z\leqq 1$ であるすべての実数の集合と対等であるから $\overline{\overline{A}}\geqq\aleph$ である．ゆえに $\overline{\overline{A}}=\aleph$．しかるに 0 と 1 の間にある実数(ただし 0 を除き，1 を含む)からなる二項系列 (x,y) の集合 B は濃度 $\aleph^2$ を持ち，$A\sim B$ から $\aleph^2=\aleph$ である．

濃度の計算法則を用いれば容易に

$$\aleph^2=\aleph \quad \text{から} \quad \aleph^n=\aleph \qquad (n\text{ は自然数})$$

がわかる．

定理 14 n 次元空間のすべての点の集合は濃度 $\aleph$ を持つ．n 次元空間の矩形の濃度も $\aleph$ である．

証明 前半は $\aleph^n=\aleph$ から明らかである．矩形 U: $a_k<x_k<b_k\,(k=1,2,\cdots,n)$ は，$a_k<y_k<b_k$ であるすべての実数 y_k の集合を A_k とするとき，$A_k\,(k=1,2,\cdots,n)$ の結合集合と対等であるから

$$\overline{\overline{U}}=\underbrace{\aleph\cdot\aleph\cdots\aleph}_{n\text{ 個}}=\aleph^n=\aleph.$$

---

1) すべての超越数の集合についてもまったく同様にやればよい．

定理 15　濃度 $\mathfrak{b}$ の任意の集合 B のすべての部分集合の集合 $\mathfrak{U}$[1] は濃度 $2^{\mathfrak{b}}$ を持つ.

証明　A を $0, 1$ の二個からなる集合とする. B を A に写す写像 φ のすべての集合 M は配置集合 A^B と対等, すなわち濃度 $2^{\mathfrak{b}}$ を持つ. 写像 φ において B のおのおのの要素 b に

$$b \text{ の像が } 0 \text{ のとき } \ b \notin U, \qquad b \text{ の像が } 1 \text{ のとき } \ b \in U$$

と定めると, 一つの B の部分集合 U が得られる. これを U_φ と書き, φ に対応させる. $\varphi \neq \varphi'$ とすれば, $U_\varphi \neq U_{\varphi'}$. 逆に任意の $U \subseteqq B$ をとれば $U_\varphi = U$ なる写像 φ が存在する. ゆえに $M \sim \mathfrak{U}$. したがって $\mathfrak{U}$ の濃度は $2^{\mathfrak{b}}$ である.

定理 16　任意の濃度 $\mathfrak{b}$ に対して次の不等式が成立する.

$$2^{\mathfrak{b}} > \mathfrak{b}.$$

証明　前定理における B と $\mathfrak{U}$ を考える. B を $\mathfrak{U}$ に写像する任意の写像を φ とする. φ による B のおのおのの要素 b の像を U_b とし, おのおのの b に対し

$$(1) \qquad \begin{cases} b \notin U_b \quad \text{であるとき} \quad b \in U^*, \\ b \in U_b \quad \text{であるとき} \quad b \notin U^* \end{cases}$$

と定めると, これによって B の部分集合 U^* が得られる. $\mathfrak{U}$ の要素 U^* は B に原像を持つことはできない. 仮に原像 b^* があるとする:

$$(2) \qquad U_{b^*} = U^*.$$

(1) によれば

$$(3) \qquad \begin{cases} b^* \notin U_{b^*} \quad \text{であるとき} \quad b^* \in U^*, \\ b^* \in U_{b^*} \quad \text{であるとき} \quad b^* \notin U^*. \end{cases}$$

さて (3) を (2) の関係で書き直せば

$$(4) \qquad \begin{cases} b^* \notin U^* \quad \text{であるとき} \quad b^* \in U^* \\ b^* \in U^* \quad \text{であるとき} \quad b^* \notin U^* \end{cases} \qquad \text{(明らかに不合理)[2].}$$

1)　空集合および B 自身を含む.
2)　この証明の方法は対角線の方法である.

ゆえに写像φは一対一の対応ではない．しかるにφはBを$\mathfrak{U}$に写像する任意の写像であるから，結局Bと$\mathfrak{U}$の間には一対一の対応が存在しない．ゆえに$2^{\mathfrak{b}}\neq\mathfrak{b}$である．他方において，$b\in B$とすれば，$b$一個よりなる$B$の部分集合$\{b\}$は$\{b\}\in\mathfrak{U}$であるから$B$は$\mathfrak{U}$の部分集合と対等である．ゆえに$2^{\mathfrak{b}}\geqq\mathfrak{b}$かつ$2^{\mathfrak{b}}\neq\mathfrak{b}$．したがって$2^{\mathfrak{b}}>\mathfrak{b}$.

この定理によればつぎの重要な事実がわかる．任意の濃度を$\mathfrak{a}_0$(例えば$\aleph_0$)とし，$\mathfrak{a}_0$より順次に$2^{\mathfrak{a}_0}=\mathfrak{a}_1$, $2^{\mathfrak{a}_1}=\mathfrak{a}_2$, … とおけば濃度の無限系列$\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdots$が得られる．明らかに$\mathfrak{a}_0<\mathfrak{a}_1<\mathfrak{a}_2<\cdots<\mathfrak{a}_k<\cdots$．つぎに$\mathfrak{a}_0+\mathfrak{a}_1+\cdots$を$\mathfrak{b}_0$とおけば$\mathfrak{b}_0$はどの項$\mathfrak{a}_k$よりも大きい．なぜかといえば，任意の$\mathfrak{a}_k$をとれば$\mathfrak{a}_k<\mathfrak{a}_h$である$\mathfrak{a}_h$が存在し，$\mathfrak{a}_h\leqq\mathfrak{b}_0$であることは濃度の和の定義から明らかであるから$\mathfrak{a}_k<\mathfrak{a}_h\leqq\mathfrak{b}_0$，すなわち$\mathfrak{a}_k<\mathfrak{b}_0$である．

この$\mathfrak{b}_0$から$2^{\mathfrak{b}_0}=\mathfrak{b}_1$, $2^{\mathfrak{b}_1}=\mathfrak{b}_2$, … と繰り返すと際限なくより大きい濃度が得られる．この事実から$\aleph_0, \aleph$よりも大なる濃度が無限に多く存在することがわかる．

定理17　nを1でない自然数とすれば

$$n^{\aleph_0}=\aleph \quad \text{したがって特に} \quad 10^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}=\aleph.$$

証明　A: 集合$\{0,1,2,\cdots,9\}$, B: すべての自然数の集合．配置集合A^BはAの要素から成る無限系列

(1)　　$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

のすべての集合である．いま(1)の前に0と小数点．を付ければ

(2)　　$$0.a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots$$

であるから，A^Bは(2)の形のすべての小数の集合Mと対等である．(2)の形の無限小数のすべての集合をC，有限小数(すなわち周期0を持つもの)のすべての集合をDとすれば，$M=C+D$，しかるに$\overline{\overline{C}}=\aleph$, $\overline{\overline{D}}=\aleph_0$[1]であるから$\overline{\overline{M}}=\aleph$．したがって$A^B$の濃度は$10^{\aleph_0}=\aleph$である．十進小数の代りに自然数$n(\geqq2)$を

1)　有限小数は有理数を表わすからである．

基数とする n 進小数を用いればまったく同様に $n^{\aleph_0}=\aleph$ がわかる.

$2^{\aleph_0}=\aleph$ を換言すれば,

定理 18　可付番無限集合のすべての部分集合の集合は濃度 $\aleph$ を持つ.

定理 19　$0\leqq x\leqq 1$ で定義された函数のすべての集合 F の濃度を $\mathfrak{f}$ で表わせば

$$\mathfrak{f}=\aleph^{\aleph}.$$

証明　　B: $0\leqq x\leqq 1$ であるすべての実数の集合,

A: すべての実数の集合.

B を A に写像する写像の集合と F とは一対一の対応が付けられる. 写像 φ において B のおのおのの要素 x に対応する A の要素を $\varphi(x)$ とすれば, $\varphi(x)$ は F に属する函数である. 相異なる写像から相異なる函数が定まる. 逆に F の任意の函数 $\varphi(x)$ を与えれば, B を A に写像する一つの写像が定まる. ゆえに $\mathfrak{f}=\aleph^{\aleph}$.

濃度の計算法則から容易に

$$\mathfrak{f}=\aleph^{\aleph}=(2^{\aleph_0})^{\aleph}=2^{\aleph_0\aleph}=2^{\aleph}.$$

したがって,

定理 20　濃度 $\aleph$ を持つ集合のすべての部分集合の集合は濃度 $\mathfrak{f}$ を持つ. したがって $\mathfrak{f}>\aleph$[1].

注意　連続体問題と同様に $\aleph<\mathfrak{f}$ の間に他の濃度が存在するか否かは未解決である.

さらに濃度の計算法則によれば

$$\begin{aligned}\aleph_0^{\aleph_0}&=(n\aleph_0)^{\aleph_0}=n^{\aleph_0}\cdot\aleph_0^{\aleph_0}=n^{\aleph_0\cdot\aleph_0}\cdot\aleph_0^{\aleph_0}\\&=(n^{\aleph_0})^{\aleph_0}\cdot\aleph_0^{\aleph_0}=(n^{\aleph_0}\cdot\aleph_0)^{\aleph_0}=(\aleph\cdot\aleph_0)^{\aleph_0}\\&=\aleph^{\aleph_0}=(n^{\aleph_0})^{\aleph_0}=n^{\aleph_0\cdot\aleph_0}=n^{\aleph_0}=\aleph\qquad(n\text{ は 1 でない自然数}),\end{aligned}$$

$$\aleph^{\aleph_0}=(2^{\aleph_0})^{\aleph_0}=2^{\aleph_0\cdot\aleph_0}=2^{\aleph_0}=\aleph.$$

定理 21　$0\leqq x\leqq 1$ で定義された連続函数 $f(x)$ のすべての集合 C は濃度 $\aleph$ を

1)　定理 16 参照.

持つ.

証明 連続函数$f(x)$は$0\leqq x\leqq 1$のすべての有理数における値が定まれば連続性によってただ一つに定まる．したがって$0\leqq x\leqq 1$である有理数の集合をBとし，すべての実数の集合をAとすれば，Cは配置集合A^Bの一部分と対等になる．A^Bの濃度は$\aleph^{\aleph_0}=\aleph$であるから$\overline{\overline{C}}\leqq\aleph$である．他方において$f(x)=c$(定数)，$0\leqq c\leqq 1$という連続函数の集合は$C$の部分集合かつ濃度$\aleph$であるから$\overline{\overline{C}}\geqq\aleph$である．ゆえに

$$\overline{\overline{C}}=\aleph.$$

定理 22 $0\leqq x\leqq 1$で定義された不連続函数のすべての集合Dの濃度は$\mathfrak{f}$である．

証明 $0\leqq x\leqq 1$で定義されたすべての函数，不連続函数，連続函数の集合をそれぞれF, D, Cとする．明らかに$F=D+C$.

$$0\leqq x<1 \quad \text{において} \quad f(x)=0,$$
$$x=1 \quad \text{において} \quad f(1)=c\neq 0$$

であるすべての不連続函数の集合を$D_1\,(\subset D)$とし，D_1のDに対する補集合をD_2とすれば$D=D_1+D_2$，$\overline{\overline{D_1}}=\aleph$.

$$F=(D_1+D_2)+C=(D_1+C)+D_2 \quad \text{および} \quad D=D_1+D_2 \quad \text{において}$$
$$D_1+C\sim D_1{}^{1)} \quad \text{かつ} \quad D_2\sim D_2.$$

ゆえに

$$\overline{\overline{D}}=\overline{\overline{F}}=\mathfrak{f}.$$

12. 順序ある集合

有理数の集合は自然数の集合と対等であるから，すべての有理数に番号が付けられる:

$$r_1,\ r_2,\ r_3,\ \cdots,\ r_n,\ \cdots.$$

---

1) $\bar{D}_1=\aleph$，$\bar{C}=\aleph$よりD_1+Cは濃度$\aleph$を持つ.

しかしこれらは大いさの順にならぶことはできない．なぜかといえば有理数の稠密性によって有理数 $r<r'$ の間には $r<r''<r'$ である他の有理数 r'' が存在するからである．すなわち両集合に一対一の対応を付けるには，有理数の大いさの順序を犠牲にしなければならない．大いさの順序を考慮に入れて両集合を比較するのに，自然数の集合には最初の要素があるが有理数の集合にはこれがなく，前者の最初でない要素にはすぐ前，すぐ後の要素があるが後者にはこれらがない．このように対等な二つの集合も順序を考慮に入れるときは，両者の間に大きな差異があり得ることがわかる．

われわれは必ずしも数の大小の順序を制限しないでとにかく順序のある集合を考える．

順序ある集合の定義　集合 M において，

相異なるどの二つの要素 a, b をとるも，それらの間に一つの関係 $\prec$ が定義されていて，

$$a \prec b \quad \text{かまたは} \quad b \prec a \qquad (a \prec b \text{ の代りに } b \succ a \text{ とも書く})$$

が成立してかつつぎの三つの性質が成立するものとする．

(i)　$a=b$ であるときは $a \prec b$ でも $b \prec a$ でもない．

(ii)　$a \neq b$ であるときは $a \prec b$ かまたは $b \prec a$ である．

(iii)　$a \prec b$, $b \prec c$ であるときは $a \prec c$ である．

このとき集合 M は**順序が付けられた**または**順序ある集合**という．

ここに記号 $a \prec b$ は‘a は b の前’，$b \succ a$ は‘b は a の後’と読むことにする．

例　簡単な順序ある集合の例を示そう．

(1)　$\{a, b, c\}$ は $a \prec b$, $b \prec c$ なる三個の要素からなる集合．

(2)　整数の集合はいく通りにも順序が付けられる．

$\{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$[1]　二つの整数は小なる方が前．

$\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \cdots\}$　二つの整数は絶対値の小なる方が前，同

1)　‘前’にある要素を左に書いて示す．

じ絶対値のものは正の方が前.

$\{0, 2, -2, 4, -4, 6, -6, \cdots, 1, -1, 3, -3, 5, -5, \cdots\}$　二つの整数は偶数が奇数よりも前，共に偶数，共に奇数のとき絶対値の小なる方が前，同じ絶対値のとき正の方が前.

この定義の直接の結果として，

(1)　順序ある集合の二つの要素 a, b をとれば

$$a = b, \quad a \prec b, \quad a \succ b$$

のいずれか一つが成立して，しかもどの二つも両立しない.

(2)　M の順序を定義する要素間の関係によって M の任意の部分集合も順序付けられる．ゆえに M の任意の部分集合は順序ある集合である.

(3)　二つの順序ある集合 A, B が同一であるのはつぎのときかつこのときに限られる.

(i)　A と B とが全然同じ要素を持つ．すなわち $x \in A$ とすれば $x \in B$，逆に $x \in B$ とすれば $x \in A$.

(ii)　A において $x \prec x'$ とすれば，B においても $x \prec x'$.

同じ要素からなる種々の順序ある集合の存在はすでに例で示しておいた.

注意　今後われわれは，ある一定の順序のある集合だけを取り扱うことにする.

13. 相似，順序型

二つの順序ある集合 A, B があって，A と B との間に一対一の対応が付けられかつこの対応において A のいずれの二つの要素 a, a' をとるも，それらの B における像をそれぞれ b, b' としたとき，

$$a \prec a' \quad \text{ならば} \quad b \prec b'$$

であるとすれば，このとき A と B とは互いに**相似**であるといい，$A \simeq B$ または $B \simeq A$ で表わす．またこのような対応を A と B の間の**相似な対応**という.

明らかに相似な二つの集合は対等である．逆は一般に成立しない[1]．つぎの関係は容易にわかる．

(1) $A \simeq A$.

(2) $A \simeq B$ ならば $B \simeq A$.

(3) $A \simeq B$, $B \simeq C$ ならば $A \simeq C$.

集合 A と集合 B が相似であるとき同じ**順序型**(Ordnungstypus)または簡単に同じ**型**を持つといい，相似でないとき相異なる順序型(または型)を持つという．順序型を表わすのに，一般にギリシャ文字 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ を用いる．また集合 A の順序型を $\overline{A}$ で表わすこともある．要素の個数 n である(換言すれば濃度 n である)二つの有限の順序ある集合は相似であるから，この型を n で表わす．普通の順序 ($n<n'$ であるとき $n \prec n'$) を持つ自然数の集合: $\{1, 2, 3, \cdots\}$ の順序型を ω，これをまったく逆にした順序 ($n<n'$ であるとき $n \succ n'$) を持つ自然数の集合: $\{\cdots, 3, 2, 1\}$ の順序型を ω^* で表わす．また普通の順序($r<r'$ であるとき $r \prec r'$)を持つ有理数の集合の順序型を η で表わす．

注意 自然数 1, 2, 3, … は物の個数を表わすのと，物に一番目，二番目，…と番号を付けるのと二通りに使用される．前者を計数(Kardinalzahl)，後者を順序数(Ordnungszahl)という．濃度は有限の計数の概念の拡張と見られ，順序型は有限の順序数の概念の拡張と見られる．後節で述べる特別な順序ある集合の型をやはり順序数という．

注意 集合 A, B の型を α, β としたとき，$\alpha=\beta$ とは A と B が相似である，$\alpha \neq \beta$ とは A と B が相似でないという他のいい表わし方である．

14. 順序型の和，積

A, B を二つの互いに素な集合とする．A と B の和集合につぎの法則によっ

---

1) 自然数の集合および有理数の集合に大きさにしたがって順序を付けたとき，両集合は対等であるが相似ではない．

て順序を定義する．

(1)　$a \in A$，$b \in B$ であるとき $a \prec b$．

(2)　$a', a'' \in A$ かつ A において $a' \prec a''$ であるとき $a' \prec a''$．

(3)　$b', b'' \in B$ かつ B において $b' \prec b''$ であるとき $b' \prec b''$．

このように**順序付けられた和集合**を $A+B$[1] で表わす．

二つの順序型 α, β が与えられたとき，型 α, β を持つ互いに素な集合 A, B をえらび，和集合 $A+B$ の型で **α と β の和** $\alpha+\beta$ を定義する．α および β が与えられると型 α, β を持つ特別な集合 A, B のえらび方に関係なく一意的に $\alpha+\beta$ は定まる．なぜならば，$\overline{A_1}=\overline{A_2}=\alpha$，$\overline{B_1}=\overline{B_2}=\beta$ かつ $A_1B_1=\emptyset$，$A_2B_2=\emptyset$ とすれば明らかに $A_1+B_1 \simeq A_2+B_2$ である．型の加法には結合法則 $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$ は成立するが，これに反して交換法則 $\alpha+\beta=\beta+\alpha$ は一般に成立しない．

例　$A=\{2, 3, 4, \cdots\}$，$B=\{1\}$ とすれば $\overline{A}=\omega$，$\overline{B}=1$．

$A+B=\{2, 3, 4, \cdots, 1\}$ の型は $\omega+1$，$B+A=\{1, 2, 3, 4, \cdots\}$ の型は $1+\omega=\omega$ である．明らかに $1+\omega=\omega \neq \omega+1$．

容易につぎのことがわかる．n を有限の型とすれば $n+\omega=\omega$，これに反して $\omega+1$，$\omega+2$，$\omega+3$，… は皆互いに相異なる．

一般の型の和の定義　一つの順序ある集合 B のおのおのの要素 b に一つの型 α_b が対応しているものとする．すべての α_b の **B の順序による和**

(1)　$$\cdots+\alpha_{b'}+\cdots+\alpha_{b''}+\cdots+\alpha_{b'''}+\cdots$$

($b' \prec b''$ であるとき $\alpha_{b'}$ は $\alpha_{b''}$ の左に書く)を定義するにはつぎのようにする．まず，おのおのの α_b に対してこれを型とする集合 A_b をこれらが互いに素であるようにえらび，これらの和集合 V をつぎの法則で順序付ける．V の二つの要素が同一の A_b に属する場合は A_b におけると同じ前後の関係を与える．V の二つの要素が相異なる A_b に属する場合は，$a_{b'} \in A_{b'}$，$a_{b''} \in A_{b''}$ かつ B において $b' \prec b''$ であるとき $a_{b'} \prec a_{b''}$ とする．この**順序ある和集合** V の順序型 σ

1)　$A+B \neq B+A$.

でα_bの順序ある和(1)を定義する．この拡張された和の場合にもおのおののα_bに対してこれを型とする集合のえらび方には結果は無関係である．換言すれば，他のえらび方による順序ある和集合をV'とすれば，$V \simeq V'$である．特別の場合として，Bのおのおのの要素bに対応する型α_bがすべてαに等しいとき，Bの型をβとして，前述の順序ある和集合Vの型πでαとβの**積**と定義する：$\pi=\alpha\cdot\beta$．一般には$\alpha\cdot\beta\neq\beta\cdot\alpha$である．

例 $\alpha=\omega$，$\beta=2$の場合：$B=\{1,2\}$，$A_1=\{1,3,5,\cdots\}$，$A_2=\{2,4,6,\cdots\}$とし，$A_1+A_2=\{1,3,5,\cdots,2,4,6,\cdots\}$の型として$\pi=\omega+\omega=\omega\cdot 2$が得られる．$\alpha=2$，$\beta=\omega$の場合：$B=\{1,2,3,\cdots\}$，$A_k=\{a_k,b_k\}(k=1,2,3,\cdots)$とし，$V=\{a_1,b_1,a_2,b_2,a_3,b_3,\cdots\}$の型(すなわち$\omega$)として$\pi=2\cdot\omega$が得られる．ゆえに$2\cdot\omega=\omega$．

つぎに今後用いる言葉を説明する．集合Aが与えられたとする．

a_0とa_0以外のおのおのの要素aの間に，つねに$a_0 \prec a$が成立するときa_0をAの最初の要素といい，つねに$a \prec a_0$が成立するときa_0をAの最後の要素という．また$a' \prec a \prec a''$という関係があるときaはa'とa''の間にあるという．aを一つの要素，A'をAの部分集合とする．おのおのの要素$a' \in A'$に対して$a \prec a'$であるときaはA'の前にあるという．aはA'の後，aはAとA''の間，aはA'とa''の間などの言葉も同様である．aがA'の後にあってaとA'の間にAの要素が存在しないときaはA'の直後の要素という．aはA'の直前の要素というのもこれと同様である．

15. 順序型 η

普通に順序付けられた有理数の集合$R\,(\overline{R}=\eta)$はつぎの三つの性質を持つことは容易にわかる．

I．$\overline{\overline{R}}=\aleph_0$．

II．Rは最初の要素も最後の要素も持たない．

III．Rのどの二つの要素の間にも他の要素が存在する(稠密性)．

これらの三性質が型ηを持つ集合の特徴であることをつぎに示そう．すなわち，

定理[1] 一つの順序ある集合Mがあってつぎの三つの性質

(1) $\overline{\overline{M}}=\aleph_0$.

(2) Mは最初の要素も最後の要素も持たない.

(3) Mは稠密である.

を持つならば，$\overline{M}=\eta$である.

有理数の集合は濃度$\aleph_0$を持つから，すべての要素に番号が付けられる．換言すれば型ωであるように順序を定めることができる．このように順序を付けた有理数の集合をR_0とする.

$$R_0=\{r_1, r_2, \cdots, r_\nu, \cdots\} \qquad (\overline{R_0}=\omega).$$

まったく同じ理由でMの要素の全体をM_0とする.

$$M_0=\{m_1, m_2, \cdots, m_\nu, \cdots\} \qquad (\overline{M_0}=\omega).$$

$M\simeq R$を証明するには，両者の間に相似な対応の存在することをいえばよい．まず，Rの要素r_1にMの要素m_1を対応させる．つぎにRにおいてr_2はr_1に対してある一定の前後関係($r_2\prec r_1$または$r_2\succ r_1$)を持つ．Mにおいてm_1に対してこれと同じ前後関係を持つm_νは無限に多くある((2)による)．このようなm_νのうちM_0において番号の最小なものをm_{i_2}とし，これをr_2に対応させる．この方法を順次に行って，Rのν個の要素$r_1, r_2, \cdots, r_\nu$に対してその像m_1, $m_{i_2}, \cdots, m_{i_\nu}$が得られたとしかつ$R$における$r_1, r_2, \cdots, r_\nu$相互間の前後関係と$M$における$m_1, m_{i_2}, \cdots, m_{i_\nu}$相互間の前後関係と相同じとすれば，$r_{\nu+1}$が$r_1, r_2$, $\cdots, r_\nu$のおのおのに対してRにおいて持つ前後関係と同じ前後関係をMにおいて$m_1, m_{i_2}, \cdots, m_{i_\nu}$のおのおのに対して持つ$M$の要素は無限に多くある((2), (3)による)．そのうちM_0において番号の最小なものを$m_{i_{\nu+1}}$として，これを$r_{\nu+1}$の像とする．こうしてRのおのおのの要素r_νに対してMの要素m_{i_ν}を像

1) $\overline{M}=\eta$とすれば，(1), (2), (3) の三性質が成立することは明らかである．

として対応させることができる．しかも m_{i_ν} のすべてからなる M の部分集合を M' とすれば，明らかに $R\simeq M'$ である．ゆえに $M'=M$ を証明すれば，証明は完結する．それにはふたたび帰納法を用いる．M_0 の要素 m_1 はたしかに $m_1\in M'$．M_0 の要素 $m_1, m_2, \cdots, m_\nu$ が M' に属すれば $m_{\nu+1}$ もまた M' に属することを証明する．$m_1, m_{i_2}, \cdots, m_{i_\lambda}$ の中に $m_1, m_2, \cdots, m_\nu$ が含まれるように λ を定める．その場合に $m_{\nu+1}$ も含まれるかも知れない．そのときは $m_{\nu+1}\in M'$ である．これに反して $m_{\nu+1}$ が $m_1, m_{i_2}, \cdots, m_{i_\lambda}$ に含まれないときは，M において $m_{\nu+1}$ はこれらのおのおのに対して一定の前後関係を持つ．R において $r_1, r_2, \cdots, r_\lambda$ のおのおのに対してこれと同じ前後関係を持つ R の要素は無限に多くある(II, IIIによる)．その中 R_0 において番号の最小であるものを $r_{\lambda+\sigma}$ とする．

R において $r_{\lambda+\sigma}$ が $r_1, r_2, \cdots, r_{\lambda+\sigma-1}$ のおのおのに対して持つ前後関係と M において $m_{\nu+1}$ が $m_1, m_{i_2}, \cdots, m_{i_{\lambda+\sigma-1}}$ のおのおのに対して持つそれとは同一であることは容易にわかる．M' はいかなる方法で作られたかということを考えれば，ただちに $i_{\lambda+\sigma}\leqq\nu+1$ しかも $m_1, m_{i_2}, \cdots, m_{i_\lambda}$ の中に $m_1, m_2, \cdots, m_\nu$ は含まれているから $i_{\lambda+\sigma}=\nu+1$ でなければならない．すなわち $m_{\nu+1}=m_{i_{\lambda+\sigma}}\in M'$．

16. 整列集合

順序ある集合において，その部分集合が空集合でない限り必ず最初の要素を持つとき，この集合を**整列集合**という．

定理1　A を整列集合，B を順序ある集合として，$A\simeq B$ であるときは B もまた整列集合である．

証明　A と B との相似な対応によって任意の $B_1\subseteq B$ に相似な A の部分集合 A_1 がある．A_1 は最初の要素を持つから B_1 もまた最初の要素を持つ．

定理2　整列集合のいかなる部分集合も整列集合[1)]である．

証明　整列集合の定義からの直接の結果である．

1)　空集合もこの部分集合の中に含まれる．

定理3　整列集合 A のおのおのの要素 a には，a の後に要素が存在すれば，直後の要素が存在する．

証明　$a \prec x$ であるすべての x の集合 A_1 は空集合でないから最初の要素 a_1 を持つ．この a_1 は a の直後の要素である．

定理4　整列集合 A のおのおのの部分集合 A_1 には，A_1 の後に要素が存在すれば，直後の要素が存在する．

証明　$x \in A$，$A_1 \prec x$[1] である x の集合の最初の要素 a_1 がそれである．

注意　定理4において

(1)　A_1 に最後の要素があるとき，

これを a とすれば，a_1 は a の直後の要素である．

(2)　A_1 に最後の要素がないとき，

$x \prec a_1$ ならば $a \in A_1$ でしかも $x \prec a$ である a がある．それればかりでなく $x \geqq a_1$ ならば，$a \in A_1$ であるすべての a に対して $x \succ a$ である．この場合に a_1 を A_1 の**極限要素**という．

定理5　$\mathfrak{A}$ を互いに素な整列集合 A の整列集合とする．すべての A の順序ある和集合 V (14節参照)は整列集合である．

証明　集合 V の任意の部分集合[2] V_0 が最初の要素を持つことをいえばよい．V_0 に要素を与える A のすべての集合は整列集合 $\mathfrak{A}$ の部分集合であるから最初の要素 A_0 がある．積集合 $A_0V_0 \subseteqq A_0$ の最初の要素 a_0 は V_0 の最初の要素である．

例　$A_1=\{1, 3, 5, 7, \cdots\}$，$A_2=\{2, 4, 6, \cdots\}$ はともに整列集合，和集合 $A_1+A_2=\{1, 3, 5, 7, \cdots, 2, 4, 6, \cdots\}$ は整列集合である．

つぎに

$$A=\{1, 3, 5, 7, \cdots, 2, 4, 6, \cdots\},$$

---

1)　$A_1 \prec x$ を 'x は A_1 の後' と読む．

2)　空集合でない．

$$B=\{3,5,7,9,\cdots,2,4,6,\cdots\}$$

を考えれば，$B\subset A$ かつ $2n-1\in A$ に $2n+1\in B$ を対応させ，$2n\in A$ に $2n\in B$ を対応させれば $A\simeq B$ である．ここにこの相似において，A のおのおのの要素 a の B における像 b_a は A において $a\leqq b_a$ であることに注意されたい．

定理6　A が整列集合であって

$$B\subsetneqq A,\qquad B\simeq A$$

であるとき，いかなる相似な対応においても，a の像を b_a とすれば

$$a\leqq b_a$$

である．

証明　仮に，$b_a\prec a$ である a が存在すれば，このような a の最初の要素 a_0 がある．A において $a_1=b_{a_0}\prec a_0$ であるから $b_{a_1}\prec b_{a_0}=a_1$．これは a_0 の仮定に反する．

定理6の系として，

定理7　A を整列集合とすれば，

(1)　A は A 自身にただ一通りに相似に写像される．

(2)　A はこれと相似な B にただ一通りに相似に写像される．

証明　A を A 自身に相似に写像するとき，A のおのおのの要素がそれ自身と対応するか，自身よりも前にある要素と対応する要素が少なくとも一つあるかそのいずれかである．後の場合は定理6によって実際には起らない．

よって A と A 自身の相似はおのおのの要素をそれ自身に対応させるより仕方がない．

つぎに $A\simeq B$ において相似な写像が二つあれば，同一の B の要素に一つの写像で対応した A の要素と他の写像で対応した A の要素とを互いに対応させて，おのおのの要素をそれ自身に対応させることなくして，A を A 自身に相似に写像できることになって前の主張に反する．

a を整列集合 A の要素とするとき

$$x \prec a$$

であるすべての要素xの集合をaによるAの**截片**といい，これをA_aで表わす．ただし最初の要素による截片は空集合を意味するものとする．截片の定義から直接，

定理 8　A_aの截片はAの截片である．

定理 9　$a_1 \in A$，$a_2 \in A$とし，$a_1 \prec a_2$ならばA_{a_1}はA_{a_2}の截片である．

定理 10　整列集合は自己の截片と相似にならない．

証明　AとA_aの間に相似な対応があるとする．$a \in A$のA_aにおける像をa'とすればAにおいて$a' \prec a$（これは定理6に反する）．

定理 11　同一の整列集合の相異なる二つの截片は相似にならない．

証明　定理9および定理10による．

したがって対偶として$A_{a_1} \simeq A_{a_2}$とすれば$a_1 = a_2$である．

定理 12　$a_1 \prec a_2$であるとき$A_{a_1} \prec A_{a_2}$とすれば，A_aの集合$\mathfrak{A}$はAと相似である．

証明　Aのおのおのの要素aに$\mathfrak{A}$の要素A_aを対応させる．

$a_1 \prec a_2$であるとき$A_{a_1} \prec A_{a_2}$．しかも$\mathfrak{A}$の要素A_aは原像aを持つ．

定理 13　A, Bが整列集合であって，AとBとの間に相似な写像φがあるとき，aをAの要素とすれば

$$A_a \simeq B_b$$

であるBの要素bが一つしかもただ一つ存在してかつbはaの像である．

証明　このようなbのただ一つであることは定理11によってわかる．

$x \in A_a$とすれば$x \prec a$であるからφによるこれらの像は$b_x \prec b$（bはaの像），したがって$b_x \in B_b$．また$x_1 \in A_a$，$x_2 \in A_a$かつ$x_1 \prec x_2$とすれば$b_{x_1} \prec b_{x_2}$．逆に$y \in B_b$とすれば$y \prec b$であるからこれらの原像は$a_y \prec a$，したがって$a_y \in A_a$．

定理 14　整列集合A, Bがあって，

$a \in A$ならば$A_a \simeq B_b$なるbが存在し，

$b \in B$ ならば $B_b \simeq A_a$ なる a が存在する

とすれば $A \simeq B$ である.

証明 A_a に相似な B_b はただ一つ，逆に B_b に相似な A_a はただ一つであるから $A_a \simeq B_b$ であるとき a と b とを互いに対応させれば，A と B の間に一対一の対応 φ を得られる．この対応 φ は相似である．$a_1 \prec a_2$ とすれば A_{a_1} は A_{a_2} の截片であるから，$A_{a_1} \simeq B_{b_1}$，$A_{a_2} \simeq B_{b_2}$ から B_{b_1} は B_{b_2} の截片，したがって $b_1 \prec b_2$ である.

定理 15 A および B を整列集合とすれば，

(1) A は B と相似である.

(2) A は B と相似な截片を持つ.

(3) B は A と相似な截片を持つ.

そのいずれか一つが成立しかついずれの二つも両立しない.

証明 まずつぎの四つの場合が考えられる.

1°. A に B と相似な截片があり，B に A と相似な截片がある.

2°. A に B と相似な截片があり，B に A と相似な截片がない.

3°. A に B と相似な截片がなく，B に A と相似な截片がある.

4°. A に B と相似な截片がなく，B に A と相似な截片がない.

これら四つの場合は起るべきすべてを尽しかついずれの二つも互いに排斥する.

1° の場合は実際に起らない．仮に $A_a \simeq B$，$A \simeq B_b$ とする．B と A_a の相似によって B_b は A_a のある截片，すなわち A のある截片 $A_{a'}$ と相似になる．したがって A は $A_{a'}$ と相似になって定理 10 の主張に反する．これから (2) と (3) の両立しないことがわかる．(1) と (2) または (3) の両立しないことも明らかである．こうして 4° の場合に A と B とが相似であることを示せば定理は完全に証明される．つぎにこれを定理 14 を用いて証明する．それには，

$a \in A$ とすれば，必ず $A_a \simeq B_b$ である b が存在することを証明すればよい[1].

---

1) $b \in B$ とすれば $B_b \simeq A_a$ である a が存在することもまったく同様に証明できる.

仮に $A_a \simeq B_b$ である b が存在しないような a があるものとして，その集合の最初の要素を a_0 とする．a_0 が A の最初の要素でないことは明らかである．

$a \in A_{a_0}$ とすれば，$A_a \simeq B_b$ なる b が存在する．このような b の集合を B' とすれば $B' \subseteqq B$ であるから B' は整列集合である．

いま $b \in B'$, $B_b \simeq A_a$ とする．$b_1 \in B_b$ とすれば b_1 による B_b の截片 B_{b_1} は A_a のある截片 A_{a_1} と相似である：$B_{b_1} \simeq A_{a_1}$. ゆえに $b_1 \in B'$ である．よって B_b は b による B' の截片である．

さて A_{a_0} と B' とにおいて，

$a \in A_{a_0}$ ならば，a による A_{a_0} の截片に相似な B' の截片が存在し，$b \in B'$ ならば，b による B' の截片に相似な A_{a_0} の截片が存在する．

定理14によって $A_{a_0} \simeq B'$ である．

ゆえに B' は B 自身と一致することはできない（なぜならばこれは仮定に反する）．したがって B には B' の後にある要素が存在する．そこで B' の直後の要素を b' とすれば $B' = B_{b'}$ となる．ゆえに $A_{a_0} \simeq B_{b'}$. これは a_0 の仮定に反する．

整列集合の順序型を特に**順序数**という．おのおのの順序ある有限集合は整列集合であるからこれらの型は普通の順序数である（ただし空整列集合の型として 0 を順序数に加える）．自然数の集合の型 ω も順序数である．無限整列集合の型を有限の順序数と区別して**超限順序数**という．

順序数の比較　整列集合 A, B の順序数をそれぞれ α, β で表わすとき，

定理15における

(1) の場合は $\alpha = \beta$ である．

(2) の場合は $\alpha > \beta$ と定義する．

(3) の場合は $\alpha < \beta$ と定義する．

この大小の定義から，

(i)　$\alpha = \beta$ であるときは，$\alpha < \beta$ でも $\beta < \alpha$ でもない．

(ii) $\alpha \neq \beta$ であるときは，$\alpha<\beta$ かまたは $\beta<\alpha$ である．

(iii) $\alpha<\beta$，$\beta<\gamma$ であるときは，$\alpha<\gamma$ である．

ゆえにここに定義した大小は**順序の性質**を持つ．よって $\alpha<\beta$ であるとき $\alpha\prec\beta$ として順序数の集合に順序を付ける．今後，順序数の集合といえばつねにこのような順序ある集合を考えることにする．

定理 16 整列集合の濃度は比較できる．

証明 A, B を整列集合とする．

$A\simeq B$ であるときはいうまでもなく $A\sim B$．ゆえに $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$．

その他の場合は一方は他方の截片に相似であるから，たとえば $A\simeq B_b$ とすれば明らかに $A\sim B_b$，$B_b\subset B$．ゆえに $\overline{\overline{A}}\leqq\overline{\overline{B}}$．

整列集合 A, B の順序数を α, β，濃度を $\mathfrak{m}_\alpha, \mathfrak{m}_\beta$ で表わすとき，順序数と濃度との関係は明らかに

$$\alpha=\beta \quad \text{ならば} \quad \mathfrak{m}_\alpha=\mathfrak{m}_\beta, \qquad \alpha<\beta \quad \text{ならば} \quad \mathfrak{m}_\alpha\leqq\mathfrak{m}_\beta,$$

逆に

$$\mathfrak{m}_\alpha=\mathfrak{m}_\beta \quad \text{ならば} \quad \alpha \lesseqqgtr \beta, \qquad \mathfrak{m}_\alpha<\mathfrak{m}_\beta \quad \text{ならば} \quad \alpha<\beta$$

である．

以上の関係をつぎのように表にして示そう．

濃度 ＼ 順序数	$\alpha<\beta$	$\alpha=\beta$	$\alpha>\beta$
$\mathfrak{m}_\alpha<\mathfrak{m}_\beta$	○	×	×
$\mathfrak{m}_\alpha=\mathfrak{m}_\beta$	○	○	○
$\mathfrak{m}_\alpha>\mathfrak{m}_\beta$	×	×	○

例 定理 5 によれば，$\omega+1$, $\omega+2$, $\cdots$, $\omega+n$ (n は有限順序数) はすべて順序数である．明らかに $\omega+1<\omega+2<\cdots<\omega+n$．

しかもこれらはいずれも濃度 $\aleph_0$ を持つ整列集合の型である．

定理 17 A を整列集合とし，$A'\subseteqq A$ とする．A, A' の順序数をそれぞれ α, α' とすれば $\alpha'\leqq\alpha$ である．

証明 仮に $\alpha'>\alpha$ とすれば，A は A' の一つの截片 A'_a に相似である．この相似において A の要素 a の A'_a における像を a' とすれば，A' において $a'\prec a$ であるから，A においても $a'\prec a$ である．定理6に反する．

定理18 順序数 α より小なるすべての順序数の集合は整列集合であってかつこの順序型は α である．

証明 A を型 α なる一つの整列集合とし，$\beta<\alpha$ であるすべての順序数 β の集合を B とする．いま A のすべての截片の集合を $\mathfrak{A}$ とすれば，$\mathfrak{A}\simeq A$ であるから[1]結局 $B\simeq\mathfrak{A}$ を証明すればよい[2]．

$A_a\in\mathfrak{A}$ とし A_a の型を β とすれば $\beta<\alpha$．ゆえに $\beta\in B$ である．おのおのの $A_a\in\mathfrak{A}$ にその型 β を対応させれば，

(1) $A_{a'}\prec A_{a''}$ ならば，$\beta'<\beta''$ すなわち $\beta'\prec\beta''$．

(2) $\beta\in B$ ならば，β である型を持つ集合は A の一つの截片 A_a と相似であるからすなわち β という型を持つ A_a が存在する．よって $B\simeq\mathfrak{A}$ である．

注意 この定理によれば型 α の整列集合のすべての要素に $\beta<\alpha$ なる順序数 β を用いて番号を付けることができる．しかも $\beta'<\beta''$ ならば $a_{\beta'}\prec a_{\beta''}$ である．

定理19 任意の順序数の集合は最初の数[3]を持つ．

証明 与えられた集合を A とし，A の任意の数を α とし，$\beta<\alpha$ であるすべての順序数 β の集合を B で表わす．B は整列集合であるから，積集合 AB も整列集合である(なぜならば，$AB\subseteq B$)．

$AB=\emptyset$ であるときは，α が A の最初の数である．

$AB\neq\emptyset$ であるときは，AB の最初の数 α_0 が A の最初の数である．

定理20 任意の順序数の集合は整列集合である．

証明 定理19の直接の結果である．

補助定理 順序数の集合 B において $\beta\in B$ と同時に $x<\beta$ である x も $x\in B$

1) 定理12参照．
2) 定理1参照．
3) 順序数を簡単に数という．

とする．このとき整列集合 B[1] の型を μ とすれば，B は $x<\mu$ であるすべての x の集合と同じものである．

証明　$x<\mu$ であるすべての x の集合を C で表わせば，C の型も μ であるから $B\simeq C$ である．まず $\gamma\in C$ ならば $C_\gamma\simeq B_\beta$ である $\beta\in B$ が存在する．しかるに，C_γ は $x<\gamma$ である x の集合，B_β は $x<\beta$ である x の集合であるから $\gamma=\beta$ である．したがって $\gamma\in B$ である．同様にして，逆に $\beta\in B$ とすれば $\beta\in C$ であるから $B=C$ である．

定理 21　任意の順序数の集合に直後の順序数が存在する[2]．

証明　$\alpha\in A$ ならば $\alpha\in B$，$x<\alpha\in A$ ならば $x\in B$ とすれば，この集合 B の順序型 μ が求めるものである．なぜかといえば，

(1)　$\alpha\in A$ ならば $\alpha\in B$，したがって $\alpha<\mu$ である[3]．

(2)　$x<\mu$ ならば $x\in B$，したがって $x\leqq\alpha$ である $\alpha\in A$ が存在する．

この定理において A が最後の要素を持つとき，μ はその最後の要素の直後の順序数である．いま α を任意の順序数とするとき，$x\leqq\alpha$ なるすべての順序数 x の集合の直後の順序数 μ は α の直後の順序数である．α は $x<\alpha$ であるすべての x の集合の型であるから，型の和の定義から $\mu=\alpha+1$ であることがわかる[4]．0 および直前の数を持つ数を**孤立数**という．孤立数 α の直前の数を $\alpha-1$ で表わす．直前の数を持たない数を**極限数**という．

すべての有限順序数の集合

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

の直後の順序数は ω である．ゆえに ω は最小の超限順序数である．

$$\omega,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \cdots,\ \omega+n,\ \cdots$$

---

1)　定理 20 による．

2)　詳しくいえば，与えられた集合を A とするとき，A のすべての順序数より大なる順序数が存在し，A のすべての順序数より大なる順序数の中に最小なるものが存在する．

3)　補助定理によって，B は $x<\mu$ であるすべての x の集合と一致する．

4)　第 14 節参照．

という集合の直後の順序数を記号 $\omega\cdot 2$ で表わす．一般に

$$\omega(k-1),\ \omega(k-1)+1,\ \cdots,\ \omega(k-1)+n,\ \cdots$$

の直後の数を $\omega\cdot k$ で表わし，

$$\omega,\ \omega\cdot 2,\ \cdots,\ \omega\cdot k,\ \cdots$$

の直後の数を ω^2 で表わす．

なお

$$\omega^k\cdot a_0+\omega^{k-1}\cdot a_1+\cdots+\omega\cdot a_{k-1}+a_k \qquad (a_0, a_1, \cdots, a_k \text{ は有限順序数})$$

という形のすべての数の直後の数を ω^ω で表わす．

すべての有限順序数および $\omega+1$, $\omega+2$ などは孤立数で，ω, $\omega\cdot k$, ω^2, ω^ω など[1)]は極限数である．なおここにあげた順序数はいずれも可付番無限な整列集合の型であることに注意されたい．

注意　定理21によれば，必然の結果として，

すべての順序数の集合は存在すると考えられない．なぜならば，仮に存在するとすれば，この集合のすべての順序数よりも大なる順序数が存在するからである．この逆理をブラリ=フォルティ(Burali-Forti)の逆理という．

定理22　(**超限帰納法**)ある命題が，

(1)　順序数 α_0 に対して真である．

(2)　$\alpha_0\leqq x<\alpha$ であるすべての x に対して真であるならば，α に対しても真である．

とすれば，この命題は $\alpha_0\leqq x$ であるすべての x に対して真である．

証明　仮に $\alpha_0<\beta$ である β に対してこの命題が真でないとする．このような β の中の最小のものを β_0 とすれば，$\alpha_0\leqq x<\beta_0$ であるすべての x に対してこの命題は真である．したがって(2)によって β_0 に対しても真となり β_0 の仮定に反する．

---

1)　記号 $\omega\cdot k$, ω^2 などは順序数の積 $\omega\cdot k$, 積 $\omega\cdot\omega$ と実際考えられる(第14節の型の積参照)．これは諸君の演習問題としておく．

定理 23　前定理の条件(2)の代りに,

(2)　$\alpha<\alpha_1$ とし, $\alpha_0\leqq x<\alpha<\alpha_1$ であるすべての x に対して真であるならば, α に対しても真である.

とすれば, この命題は $\alpha_0\leqq x<\alpha_1$ であるすべての x に対して真である.

一つの順序数列 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k, \cdots$ が与えられたとき, $\beta<\alpha$ である任意の順序数 β に対して, ほとんどすべての k について

$$\beta<\alpha_k<\alpha$$

が成立するならば $\lim_{k\to\infty}\alpha_k=\alpha$ と書く.

定理 24　順序数 α は,

(1)　可付番無限集合の順序型であって, かつ

(2)　極限数である.

とすれば,

$$\alpha_k<\alpha_{k+1}, \qquad \lim_{k\to\infty}\alpha_k=\alpha$$

である順序数列 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k, \cdots$ が存在する.

証明　$x<\alpha$ であるすべての順序数 x の集合を B とすれば

$$\overline{B}=\alpha, \text{ したがって } \overline{\overline{B}}=\aleph_0.$$

したがって集合 B のすべての要素をつぎの形に書くことができる.

$$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n, \cdots, \qquad \text{または単に}\quad \{\beta_n\}^{1)}.$$

まず α は極限数であるから, B の中に最大の順序数は存在しないことに注意する. $\beta_1=\beta_{n_1}$ とおいて $\beta_{n_1}<\beta$, $\beta\in B$ の中で $\{\beta_n\}$ において番号の最小なものを β_{n_2} とする. この方法を続けて行き, すでに β_{n_k} が得られた場合に $\beta_{n_k}<\beta$, $\beta\in B$ の中で $\{\beta_n\}$ において番号の最小なものを $\beta_{n_{k+1}}$ とする. こうして $\{\beta_n\}$ の部分系列が得られる.

さて $\alpha_k=\beta_{n_k}$ とおけば, 系列 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k, \cdots$ は求めるものである. まず, これが単調に増加することは明らかである. β を α よりも小なる任意の順序数と

1)　いうまでもなく, $k\neq h$ ならば $\beta_k\neq\beta_h$.

する．このβはいうまでもなく$\{\beta_n\}$の中に属するからたとえば$\beta=\beta_{n^*}$とする．β_{n_k}の番号n_kはほとんどすべてのkについてn^*よりも大である．$n_k>n^*$とすれば，β_{n_k}の選び方から

$$\beta_{n_k}>\beta_{n^*}=\beta,$$

ゆえに$\{\beta_{n_k}\}$のほとんどすべての項に対して

$$\beta<\beta_{n_k}<\alpha$$

である．こうして定理は証明されたわけである．

整列集合において，濃度の大小がつねに比較できて，型を与えれば一意的にその濃度が定まるけれどもこの逆は必ずしも成立しないことはすでに見たところである：詳しくいえば整列集合は順序数αを与えれば，その濃度$\bar{\alpha}$が一意的に定まるが，これに反して濃度$\aleph'$を与えたとき$\bar{\lambda}=\aleph'$である順序数λは必ずしもただ一つとは限らない．

注意 順序数αを持つ集合の濃度という代りに順序数αの濃度といい，それを$\bar{\alpha}$で表わす．記号$\bar{\alpha}$は濃度であって順序数ではない．

濃度[1] $\aleph',\aleph''$に$\aleph'<\aleph''$であるとき，$\aleph'\prec\aleph''$と前後の関係を与えれば，濃度の集合は順序ある集合である．今後，濃度の集合といえばつねにこのような順序ある集合を考えることにする．つぎに，同一の濃度$\aleph'$を持つ順序数λ(すなわち$\bar{\lambda}=\aleph'$)のうち最小のものをこの濃度$\aleph'$の**始数**(Anfangszahl)という．たとえば可付番無限の濃度$\aleph_0$の始数は明らかにωである．いま濃度$\aleph',\aleph''$の始数をΩ',Ω''としたとき，$\aleph'<\aleph''$ならば$\Omega'<\Omega''$であるから，

濃度の集合はその始数の集合と相似である．

換言すれば，

定理 25 任意の濃度の集合は整列集合である．

定理 26 任意の濃度の集合にその集合の直後の濃度が存在する[2]．

1) 今後，濃度といえばつねに整列集合の濃度を考えることにする．

2) 詳しくいえば，与えられた集合をMとすれば，Mのすべての濃度よりも大なる濃度が存在し，Mのすべての濃度よりも大なる濃度の中に最小なるものが存在する．

証明 与えられた集合を M とする．順序数の集合 $\mathfrak{M}$ をつぎのように定義する．

(1) $\bar{\alpha} \in M$ ならば，$\alpha \in \mathfrak{M}$.

(2) $\bar{\alpha}$ が M の一つの濃度より小であるとき，$\alpha \in \mathfrak{M}$.

この集合 $\mathfrak{M}$ は整列集合，その順序型を Ω_μ で表わし，その濃度を $\overline{\Omega_\mu}$ で表わす．この $\overline{\Omega_\mu}$ は M に属するすべての濃度の直後の濃度であることを証明する．まず $\mathfrak{M}$ は $\alpha < \Omega_\mu$ であるすべての順序数 α の集合であることに注意する．よって $\overline{\Omega_\mu}$ は $\mathfrak{M}$ のおのおのの数 α の濃度 $\bar{\alpha}$ より小でないことはたしかである．仮に $\overline{\Omega_\mu} = \bar{\alpha}$, $\alpha \in \mathfrak{M}$ である α があれば，$\overline{\Omega_\mu}$ も (1) または (2) を満足するから $\Omega_\mu \in \mathfrak{M}$ でなければならない．したがって

$$\Omega_\mu < \Omega_\mu$$

という矛盾が起る．こうして，

$\overline{\Omega_\mu}$ は $\mathfrak{M}$ のおのおのの数 α の濃度 $\bar{\alpha}$ より大きい．

つぎに $\aleph' < \overline{\Omega_\mu}$ とすれば $\aleph' = \bar{\lambda}$ である順序数 λ は Ω_μ よりも小である．したがってこのような λ は $\mathfrak{M}$ に属する．$\mathfrak{M}$ の性質 (1) および (2) によって $\aleph'$ よりも小でない M の要素が存在する．こうしてわれわれの主張は完全に証明された．

前定理における $\overline{\Omega_\mu}$ が M の直後の濃度であることがわかったが，いま $\overline{\Omega_\mu} = \aleph_\mu$ としたとき Ω_μ は $\aleph_\mu$ の始数であることを証明しよう．

Ω_μ が $\aleph_\mu$ の始数でないとすれば

$$\lambda < \Omega_\mu \quad かつ \quad \bar{\lambda} = \overline{\Omega_\mu}$$

である λ が存在する．λ は $\mathfrak{M}$ に属し，したがって Ω_μ も $\mathfrak{M}$ に属することになってこれは不合理である．

M が最後の要素 $\aleph_\alpha$ を持つとき，$\aleph_\mu$ はその直後の濃度である．この $\aleph_\mu$ を $\aleph_{\alpha+1}$ で表わすことにする．これに反して M が最後の要素を持たないとき $\aleph_\mu$ を**極限濃度**という．

すべての有限順序数の集合を K_1 とすれば，K_1 の濃度 $\aleph_0$ はすべての有限濃

度の極限濃度である．$\aleph_0$ の始数 Ω_0 はいわゆる ω である．

すべての可付番無限順序数 $\alpha\,(\bar{\alpha}=\aleph_0)$ の集合を K_2 とすれば，集合 K_1+K_2 の濃度は $\aleph_1$ である．$\aleph_1$ の始数 Ω_1 は集合 K_1+K_2 の直後の順序数（すなわち K_1+K_2 の順序型）である．つぎに $\aleph_1=\bar{\alpha}$ であるすべての α の集合を K_3 とすれば，集合 $K_1+K_2+K_3$ の濃度は $\aleph_2$ である．よって濃度 $\aleph_0$ から出発して

$$\aleph_0,\ \aleph_1,\ \aleph_2,\ \cdots,\ \aleph_n,\ \cdots$$

を得る．$\aleph_n=\bar{\alpha}$ であるすべての α の集合を K_{n+2} とし，和集合

$$K_1+K_2+K_3+\cdots+K_n+\cdots$$

の濃度を $\aleph_\omega$ で表わせば，$\aleph_\omega$ から同様に $\aleph_{\omega+1}, \aleph_{\omega+2}, \cdots$ を得られる．

有限順序数の集合 K_1 を**第一級**，可付番無限順序数の集合 K_2 を**第二級**，集合 K_3 を**第三級**，…という．

定理 27 K_1+K_2 の順序数からなるいかなる可付番集合 A を考えても，A に属するおのおのの数よりも大なる K_1+K_2 の数が存在する．

証明 まず A に最大数があるとき，これを α とすれば，$\alpha+1$ もまた K_1+K_2 に属するから，このときは明らかに定理は成立する．つぎに，A に最大数が存在しないとする．順序数の集合には直後の順序数が存在する[1)]から A の直後の数を β とする．この β は，$x<\alpha$, $\alpha\in A$ であるすべての x の集合を B_α とし，すべての B_α の和集合 B の順序型である．さておのおのの B_α は可付番集合，A にはただ可付番個の α が存在するから B も可付番集合である．したがって $\beta\in K_1+K_2$.

注意 定理27を用いるまでもなく，第二級 K_2（または K_1+K_2）の順序数からなる任意の集合は明らかに可付番かまたは濃度 $\aleph_1$ を持つ．

注意 連続体問題はここにも関係する．連続体の濃度 $\aleph$ ははたして $\aleph_1$ であろうかという問題が起る．

---

1) 定理21参照．

17. 整列可能定理

最後にツェルメロ (E. Zermelo) の整列可能定理 (Wohlordnungssatz) を述べよう．まずそれには選択公理というものを説明しなければならない．

任意の集合 M のすべての空集合でない部分集合 U から同時に U の一つの要素を U の代表にえらぶことができる．

これを**選択公理**という．

注意 U の代表にえらぶ要素は U のどの要素でもよいが，えらんだ以上は U に固定して，これを U の**代表要素**という．u が U の代表要素であることを $u=\varphi(U)$ という記号で表わす．

なお同一の M の要素が相異なる U の代表要素であってもさしつかえない．この選択公理にはいろいろと議論があるが，本書ではこれに触れないで，選択公理を用いてこの定理を証明する．

定理1 (ツェルメロ) 任意の集合は整列集合にすることができる．

証明 M を与えられた集合とする．

M の部分集合 Γ がつぎの二つの条件

(1) Γ は整列集合である．

(2) いかなる Γ の截片 Γ_a に対しても，

$$a=\varphi(M-\Gamma_a)$$

を満足するならば，Γ を M の**ガンマ列** (Gammafolge) という．

簡単なガンマ列を出して見よう．ガンマ列 Γ の最初の要素 m_0 による截片 Γ_{m_0} は空集合 $\emptyset$ であるから $m_0=\varphi(M-\emptyset)=\varphi(M)$．よってつぎの結論が得られる．

M のいかなるガンマ列も最初の要素は集合 M 自身の代表要素でなければならない．

したがって，M の代表要素 m_0 ただ一つからなる整列集合 $\{m_0\}$ は一つのガンマ列である．同様に $m_1=\varphi(M-\{m_0\})$ とすれば，$\{m_0, m_1\}$ もまたガンマ列で

ある.

さて定理の証明をつぎの四段に分ける.

I. 二つの相異なる M のガンマ列 Γ_1, Γ_2 は一方が他方の截片である.

すべてのガンマ列は整列集合であるから,

$\Gamma_1 \simeq \Gamma_2$ かまたは一方が他方の截片に相似である. たとえば

$$\Gamma_1 \simeq \Gamma_2' \leqq \Gamma_2{}^{1)}$$

とする. $\Gamma_1 \neq \Gamma_2'$ とすれば, Γ_1 と Γ_2' の相似において少なくとも一度は二つの相異なる要素が相互に対応する. このような Γ_1 の最初の要素を a_1 とし, その Γ_2' における像を a_2 とする. 明らかに $a_1 \neq a_2$. つぎに a_1 による Γ_1 の截片を A_1 とし, a_2 による Γ_2' の截片を A_2 とすれば $A_1 = A_2$ である. ゆえに $a_1 = \varphi(M - A_1) = \varphi(M - A_2) = a_2$ (不合理).

ゆえに $\Gamma_1 = \Gamma_2' \leqq \Gamma_2$. しかるに $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$ であるから結局 $\Gamma_1 = \Gamma_2' \prec \Gamma_2$ である.

II. すべての M のガンマ列の和集合を V とする. V の任意の二つの要素を a_1, a_2 とすれば, これを同時に含むガンマ列が必ず存在する(Iによる). このような一つのガンマ列 Γ において $a_1 \prec a_2$ であるとき V においても $a_1 \prec a_2$ と定める. このとき a_1, a_2 を同時に含む Γ のとり方に関係なく V における関係 $a_1 \prec a_2$ は一意的であることに注意する(Iによる).

このように V の要素間に関係 $\prec$ を定義すれば V が順序を持つことは容易にわかる.

つぎに V の任意の要素を a とし, $x \prec a$ なる $x \in V$ のすべての集合を V_a とすれば, V_a は a を含む任意のガンマ列 Γ の截片 Γ_a と一致することを示そう. $\Gamma_a \subseteqq V_a$ は明らかである. よって $x \in V_a$ ならば $x \in \Gamma$ であることをいえば十分である. 仮に $x \in V_a$, $x \notin \Gamma$ である x があれば, x を含む一つのガンマ列 Γ^* は Γ を截片に持つ. したがって Γ^* において $a \prec x$ (不合理).

つぎに V は整列集合であることを証明する. 任意の $U \subseteqq V$ が最初の要素を

1) $\Gamma_2' \prec \Gamma_2$ は 'Γ_2' は Γ_2 の截片' を意味する.

持つことをいえばよい．u を U の任意の要素とする．u が U の最初の要素であれば問題はない．そうでないとき u を含むガンマ列 Γ の截片 Γ_u と U との積集合を U_0 とすれば U_0 は整列集合，したがって最初の要素 u_0 を持つ．u_0 は同時に U の最初の要素である．

III．II によって定義された整列集合 V は一つのガンマ列である．よって V は最大のガンマ列である．

V がガンマ列の条件(1)を満足することは明らかである．任意の截片を V_a とする．V_a はある Γ の截片 Γ_a と一致するから

$$a = \varphi(M-\Gamma_a) = \varphi(M-V_a).$$

こうして V は条件(2)を満足する．他方において，V はすべてのガンマ列の和集合であるから最大のガンマ列である．

IV．V は M のすべての要素を含む．したがって V は M のすべての要素からなる整列集合である．

仮に $M-V \neq 0$ とする．$z=\varphi(M-V)$ とすれば $V+\{z\}$ もまたガンマ列である．これは III に反する．

この定理によれば任意の集合 M は整列集合 V にすることができる．いうまでもなく $\overline{\overline{M}}=\overline{\overline{V}}$ である．しかるに整列集合の濃度は比較ができるから必然的に任意の集合の濃度も比較が可能になる．

定理2　二つの任意の集合 A, B の濃度を $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ とすれば

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{a} > \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{a} < \mathfrak{b}$$

のいずれか一つが必ず成立する．

第7章　点 集 合 論

微分積分学および函数論を学ぶ上に必要な範囲の点集合論をできるだけ平易に解説しよう．

1. 近　傍

まず数直線上のおのおのの点Pはその座標(x)で表わされ，二点PおよびQの座標をそれぞれ(x_1)および(x_2)とするとき，明らかに二点P, Qの距離は$r(P, Q)=|x_1-x_2|$で与えられる．つぎに平面上に適当な直交軸OX, OYを取り，平面上のおのおのの点Pをその直角座標(x, y)で表わすとき，二点$P(x_1, y_1)$および$Q(x_2, y_2)$の距離が$r(P, Q)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$で与えられることは明らかであろう．

さてこの考えを拡張してn個の実数からなる系列$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$を点と呼び，二点$P(a_1, a_2, \cdots, a_n)$および$Q(b_1, b_2, \cdots, b_n)$は

$$a_\nu=b_\nu \qquad (\nu=1, 2, \cdots, n)$$

のときかつこのときに限り

$$P(a_1, a_2, \cdots, a_n)=Q(b_1, b_2, \cdots, b_n)$$

と定める．$x_1, x_2, \cdots, x_n$のおのおのがすべての実数を動くとき得られる相異なるすべての点$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$の集合をn次元空間といい，これをしばしばR_nで表わす．R_nの二点$P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $Q(y_1, y_2, \cdots, y_n)$の距離は

$$r(P, Q)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$$

で定義する．$n=1, 2$の場合には前に述べた距離と一致することは明らかであろう．このように距離を定義した場合に距離の持つ重要な性質は

(1)　　$P=Q$　ならば　$r(P, Q)=0$,

$$P \neq Q \quad ならば \quad r(P,Q) > 0,$$

(2) $$r(P,Q) = r(Q,P),$$

(3)　三点 P, Q, R に対して

$$r(P,R) \leqq r(P,Q) + r(Q,R)$$

(三角形の三辺の間の不等式)の三つが成立することである.

例　念のため不等式(3)を証明して見よう[1]. P, Q, R をそれぞれ $(x_1, x_2, \cdots, x_n), (y_1, y_2, \cdots, y_n), (z_1, z_2, \cdots, z_n)$ で表わせば, (3)は

$$\sqrt{\sum_{\nu=1}^{n}(x_\nu - z_\nu)^2} \leqq \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n}(x_\nu - y_\nu)^2} + \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n}(y_\nu - z_\nu)^2}$$

となる. いま $x_\nu - y_\nu = u_\nu$, $y_\nu - z_\nu = v_\nu$ とおいて, これを書き直せば

$$\sqrt{\sum_{\nu=1}^{n}(u_\nu + v_\nu)^2} \leqq \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} u_\nu^2} + \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} v_\nu^2},$$

両辺を二乗して簡単にすれば

$$\sum_{\nu=1}^{n} u_\nu v_\nu \leqq \sqrt{\left(\sum_{\nu=1}^{n} u_\nu^2\right)\left(\sum_{\nu=1}^{n} v_\nu^2\right)},$$

この左辺が負ならば明らかであるから, 左辺を負でないものとしてふたたび両辺を二乗すればシュワルツ(H. A. Schwarz)の不等式

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n} u_\nu v_\nu\right)^2 \leqq \left(\sum_{\nu=1}^{n} u_\nu^2\right)\left(\sum_{\nu=1}^{n} v_\nu^2\right)$$

が得られる. シュワルツの不等式の成立することは証明するまでもないであろう.

空間 R_n の一点 P_0 を固定し, ρ を正数として

(4) $$r(P_0, P) < \rho$$

を満足する点 P のすべての集合を P_0 の ρ **近傍**または P_0 を中心とする半径 ρ の開球といい, これを $U(P_0, \rho)$ という記号で表わす. 特に半径 ρ を明示する必要のない場合には, 単に $U(P_0)$ で表わす. R_1 すなわち数直線上では P_0 の座標を x_0 とすれば, $U(P_0, \rho)$ は開区間 $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ を表わし, R_2 すなわち数平面上

1)　(1)および(2)は明らかである.

では $P_0=(x_0, y_0)$ の ρ 近傍 $U(P_0, \rho)$ は (x_0, y_0) を中心として半径 ρ の円の内部すなわち開円板 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\rho^2$ に他ならない．特に注意しておきたいことは ρ 近傍 $U(P_0, \rho)$ は (4)，すなわち $r(P_0, P)<\rho$ で定義されたものであって $r(P_0, P)\leqq\rho$ でないことである．

われわれの目的は数直線上の点集合および平面上の点集合の性質を簡単に説明するのにあるが，おのおのの場合に同様の説明を繰り返す煩雑を避けるためしばしば空間 R_n の点集合があってという言葉を用いる，したがって特にことわりがなければ定理は一般の n 次元空間に対しても成立するものと承知されたい．

2. 集 積 点

空間 R_n の点集合 E（すなわち $E\subseteqq R_n$）が与えられたとする．E の一点 P に対して P の十分小なる ρ 近傍 $U(P, \rho)$ を適当にえらんで，$U(P, \rho)$ 内には P 以外に E の点が存在しないようにできるならば，P を点集合 E の**孤立点**という．換言すれば，ある近傍 $U(P)$ に対して

$$E\cdot U(P)=(P)$$

であるならば P は E の孤立点である[1]．

つぎに空間 R_n の一点 P のいかなる ρ 近傍 $U(P, \rho)$ を考えても，E の点が無限に多く含まれる場合には，P を点集合 E の**集積点**であるという．E の集積点は必ずしも E には含まれない．

例 R_1 すなわち数直線上の座標が自然数 n であるような点 $P_n\ (n=1, 2, \cdots)$ からなる可付番無限点集合 E は孤立点ばかりからなる．つぎに平面上において $P_0=(x_0, y_0)$ を中心とし半径 1 の開円板 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<1$ を E とすれば，E のおのおのの点ばかりでなく周上のおのおのの点も E の集積点である．つぎ

1) $E\cdot U(P)$ は E と $U(P)$ の積集合，すなわち共通集合 $E\cap U(P)$，また (P) は一点 P だけからなる集合を意味する．

に，平面上の有理点(x, y)，これはxおよびyがともに有理数であることを意味する，のすべての集合をEとすれば，R_2のおのおのの点はEの集積点であることは実数の稠密性から明らかであろう．

集積点の定義はつぎのようにいいかえることができる．

定理1　R_nの一点Pのいかなるρ近傍にもPと相異なるEの点が少なくも一つ含まれるならば，PはEの集積点である．

証明　そのためには，点Pのいかなる近傍の中にも無限に多くのEの点が含まれることを示せばよい．仮に，Pのある近傍$U(P)$にPと異なる点が$P_1, P_2, \cdots, P_m$のm個しか含まれないとすれば，これらのおのおのの点とPとの距離$r(P, P_1), r(P, P_2), \cdots, r(P, P_m)$の最小なものを$\rho_1$とおくとき，$P$の$\rho_1$近傍には$P$と異なる$E$の点が一つも存在しないことになって仮設に反する．

PをEの集積点とすれば，おのおのの近傍$U(P, \rho)$に対して共通部分$E\cdot U(P, \rho)$は無限点集合であるが，特にすべての正数ρに対して$E\cdot U(P, \rho)$の濃度が$\aleph_0$よりも大であるときPをEの**凝集点**という．こうして凝集点はいうまでもなく集積点であるが，逆は必ずしも成立しない；またEの凝集点はEに属するとは限らない[1]．凝集点については，後節でふたたびふれることにして，今度はR_n上の点列の集積点および極限点なるものを説明しよう．

点列$P_1, P_2, \cdots, P_\nu, \cdots$があって点$P$のいかなる近傍の中にも無限に多くの$\nu$に対して項$P_\nu$が含まれるならば，点$P$をこの点列の**集積点**といい，特に点$P$のいかなる近傍にも有限個の$\nu$を除いてすべての項$P_\nu$が含まれるならば，点$P$をこの点列の**極限点**という．

定理2　点列$P_\nu\ (\nu=1, 2, \cdots)$の集積点$P$は必ずその適当な部分列の極限点である．

証明　なぜかといえば，$r(P_\nu, P)<1$を満足するP_νの一つをP_{ν_1}とし，つぎ

1)　前の例における開円板$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<1$をEとすれば，Eのおのおのの点および周上のおのおのの点はEの凝集点である．

に $r(P_\nu, P)<1/2$ かつ $\nu_1<\nu$ を満足する P_ν の一つを P_{ν_2} とおき，以下順にこの方法を続けて一般に $r(P_{\nu_n}, P)<1/n$ を満足する部分列 $P_{\nu_n}(n=1,2,\cdots)$ を作れば，この部分列が P を極限点とすることは明らかである．

点集合 E の集積点と E の点ばかりからなる点列の極限点との間につぎの定理がある．

定理3 点 P が E の集積点であるための必要かつ十分な条件は，E の点ばかりからなる点列 $P_\nu(\nu=1,2,\cdots)$ があってすべての ν に対して $P_\nu \neq P$ かつ P を極限点とすることである．

証明 点 P を点集合 E の集積点とすれば，P の $1/\nu$ 近傍の中に P と相異なる E の点が必ず存在する．この一つを P_ν で表わせば，E の点ばかりからなる点列 $P_\nu(\nu=1,2,\cdots)$ は明らかに P を極限点とする．逆に，E の点からなる点列 $P_\nu(\nu=1,2,\cdots)$ があってすべての ν に対して $P_\nu \neq P$ かつ P を極限点とするならば，この点列の項に相異なる点が無限に含まれることになって当然 P は E の集積点であることがわかる．

例 R_2 において点列 $P_\nu=(1/\nu, 0)(\nu=1,2,\cdots)$ は原点 $(0,0)$ を集積点に持つ．明らかに原点 $(0,0)$ は点列のいずれの項とも相異なる．また $P_\nu=((-1)^\nu, 0)(\nu=1,2,\cdots)$ とすれば，この点列は $(1,0)$ および $(-1,0)$ を集積点とする．

3. 閉集合と開集合

空間 R_n の点集合 E の集積点のすべての集合を E の**導集合**といい，これを E' で表わす．E' は空集合であり得る．E とその導集合 E' の大小の関係により

$$E \supseteqq E'$$

ならば E を**閉集合**,

$$E \subseteqq E'$$

ならば E を**自己稠密集合**,

$$E = E'$$

ならば E を**完全集合**という．換言すれば，集積点が存在しないか(このときは $E'=\emptyset$ したがって $E'\subseteqq E$)または E の集積点が存在するときこれを必ず含むような点集合を閉集合，E のおのおのの点が E の集積点であるような集合を自己稠密集合[1)]，孤立点を含まないような閉集合を完全集合というのである．したがって有限点集合は閉集合である．われわれは便宜上 E が空集合であるとき，E を閉集合かつ自己稠密集合，したがって完全集合と考えるのである．

例 R_2 において $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqq r^2$ を満足するすべての点 $P(x,y)$ の集合および $a\leqq x\leqq a'$，$b\leqq y\leqq b'$ を満足するすべての点 $P(x,y)$ の集合はいずれも閉集合であるばかりでなく完全集合であってこれらをそれぞれ閉円板および閉矩形という．これに反して開円板 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<r^2$ および開矩形 $a<x<a'$，$b<y<b'$ は自己稠密であるが閉集合ではない．R_1 において自然数ばかりからなる集合の導集合は $\emptyset$ であるから，閉集合であるが自己稠密ではない，したがってなおさら完全集合ではない．

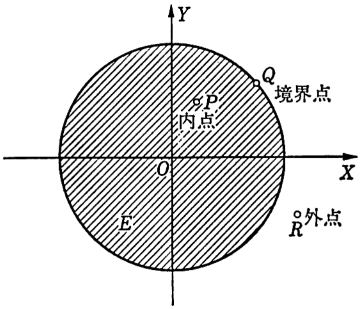
空間 R_n の点集合 E が与えられたとき空間 R_n の点を E の集積点と集積点でない点とに区別できるわけであるが，今度は近傍の考えを用いて別の角度から R_n の点を E の内点，外点および境界点に分類しよう．

まず R_n の一点 P の適当な近傍が E の点ばかりからなるとき P を E の**内点**という．つぎに E に属さない点全部の形作る集合(すなわち R_n-E)を E の補集合といい，これを $C(E)$ で表わす[2)]．$C(E)$ が空集合でないとき $C(E)$ の内点のことを E の**外点**という．換言すれば，R_n の一点 P の適当な近傍をえらんでその中に E の点が一つも存在しないようにできるならば，P を E の外点というわけである．最後に R_n の一点 P が E の内点でも外点でもないときすなわち点 P のいかなる近傍にも E に属する点と E に属さない点とが同時にはいってくるならば点 P を E の**境界点**という．

1) あるいは孤立点を含まないような集合を自己稠密であるといってもよい．

2) $C(E)$ は空集合のこともある．

例　平面上において原点を中心とする半径1の円の内部のすべての点の集合を E とすれば，E のおのおのの点は E の内点，円周上のおのおのの点は E の境界点，円の外部のおのおのの点は E の外点である．



第1図

特に，内点ばかりからなる集合を**開集合**といい，便宜上空集合も開集合と考える．ρ 近傍 $U(P,\rho)$ はもっとも手近かな開集合の例である．

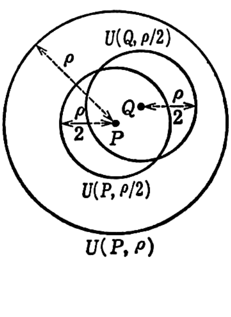
いまから閉集合および開集合に関するおもな定理を説明しよう．

定理1　任意の集合 E の導集合 E' は必ず閉集合である．

証明　P を導集合 E' の一つの集積点とする．ρ を任意の正数とし，P の $\rho/2$ 近傍 $U(P,\rho/2)$ 内に含まれる P と異なる E' の一点を Q とし，Q の $\rho/2$ 近傍 $U(Q,\rho/2)$ を考えれば明らかに

$$U(Q,\rho/2)\subset U(P,\rho),$$

しかるに $U(Q,\rho/2)$ には無限に多くの E の点が含まれるから，$U(P,\rho)$ の中にも無限に多くの E の点が含まれることになって P は E の集積点となる．したが



第2図

って P は E' に属する.

注意 定理1の証明とまったく同様にして，任意の集合 E の境界点の集合の閉集合であることが証明できる.

定理1の逆として，

定理2 任意の閉集合 E は必ずある集合の導集合である.

証明 まず E は閉集合であるから E の導集合 E' は E の部分集合である. $E_1=E-E'\neq\emptyset$ の場合だけを考えれば十分である. E_1 は E の孤立点ばかりからなるから E_1 のおのおのの点 P に対して適当に近傍 $U(P)$ をえらんで $E\cdot U(P)=(P)$ かつ $P\neq P'$ (ただし $P, P'\in E_1$) ならば $U(P)\cdot U(P')=\emptyset$ であるようにできる[1]. つぎに，おのおのの $U(P)$ と同心なしかもその半径が $U(P)$ の半径の 1/2 に等しい近傍を $V(P)$ で表わし，$V(P)$ の中に P を唯一の集積点とする可付番無限集合を適当に作り，これらの可付番無限集合の和集合を E_2 で表わす. こうすれば

$$E^* = E+E_2$$

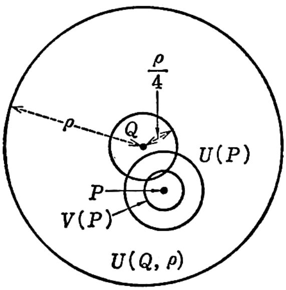
の導集合がちょうど E 自身になるのである. すなわち

$$(E^*)' = E.$$

なぜかといえば，まず E のおのおのの点が $(E^*)'$ に含まれることすなわち $E\subseteq(E^*)'$ であることは $E=E'+E_1$ であることから明らかである. したがって E^* の任意の集積点が必ず E に含まれること，すなわち $(E^*)'\subseteq E$ を証明すればよろしい. Q を $E^*=E+E_2$ の集積点とすれば，Q のおのおのの近傍に E かまたは E_2 の少なくも一方の無限に多くの点が含まれる. もし Q のおのおのの近傍に無限に多くの E の点が含まれるならば，明らかに Q は E の集積点であって E が閉集合であることから Q は E に属さなければならない. またもし Q のおのおのの近傍に無限に多くの E の点が含まれるということが否定される場合

1) E_1 のおのおのの点 P に対してまず P 以外には E の点を含まないような近傍 $U^*(P)$ を対応させて，つぎに $U^*(P)$ の半径の 1/2 を半径とする近傍を $U(P)$ とすればよろしい.

には，Q のおのおのの近傍に E_2 の点が無限に多く含まれることになって Q は E_2 の集積点になる．Q がある $U(P)$ に含まれる場合には，Q は $E_2 \cdot U(P)$ の集積点，したがって Q は E_1 の一点 P と一致して結局 E に含まれる．そうでない場合には Q はいずれの $U(P)$ にも含まれない．このとき Q の任意の近傍が無限に多くの $V(P)$ と共通点を持つことに注意しよう．なぜかといえば，Q のある近傍が有限個の $V(P)$ だけと共通点を持つとすれば，Q はこれらの $V(P)$ の境界と正の最短距離 d を持つから，Q の $d/2$ 近傍の中には E_2 の点が一つも含まれないことになって Q が E_2 の集積点であるとの仮定にそむく．ゆえに任意の正数 ρ に対して Q の $\rho/4$ 近傍は無限に多くの $V(P)$ と共通点を持ち，しかも $V(P)$ の半径が同心の $U(P)$ の半径の 1/2 に等しくかつ Q がいずれの $U(P)$ にも属さないことを想起すれば，Q の ρ 近傍 $U(Q, \rho)$ の中に無限に多くの $U(P)$ が含まれることがわかる．こうして Q は $U(P)$ の中心の集合 E_1 の集積点，したがって E の集積点となって E に属することがわかる．



第3図

注意 上の定理の証明をふり返ってみれば容易につぎの事実がわかる．二つの集合 E_1 および E_2 に対して

(1) $$E_1 \subseteqq E_2 \quad ならば \quad E_1' \subseteqq E_2'.$$

(2) $$(E_1 \cup E_2)' = E_1' \cup E_2'.$$

(1)はほとんど明白であろう．(2)は $E_1 \subseteqq E_1 \cup E_2$，$E_2 \subseteqq E_1 \cup E_2$ から $E_1' \subseteqq (E_1 \cup E_2)'$，$E_2' \subseteqq (E_1 \cup E_2)'$，したがって $(E_1 \cup E_2)' \supseteqq E_1' \cup E_2'$，しかるに上の定

理の証明の中で $(E_1\cup E_2)'\subseteq E_1'\cup E_2'$ が証明されている．ゆえに $(E_1\cup E_2)'=E_1'\cup E_2'$.

開集合と閉集合の間につぎのような重要な関係がある．

定理 3 E を閉(開)集合とすればその補集合 $C(E)$ は開(閉)集合である．

証明 同様であるから，E が閉集合である場合だけを証明しよう．このときもし $C(E)$ のある一点 P の任意の近傍に E の点が必ず含まれるとすれば，P は E の集積点となるであろう．E は閉集合であるから $P\in E$ となって $P\in C(E)$ と矛盾する．

ここで一般集合論のよく知られた公式

$$C(\cap E)=\cup C(E),\qquad C(\cup E)=\cap C(E)$$

と定理 3 とを利用すれば，閉集合に関する定理と開集合に関する定理とは一方から他方を補集合を作ることによってしばしば導くことができる．たとえば，

定理 4 開(閉)集合の和(積)はその個数に関係なく必ず開(閉)集合である[1]．

証明 まず開集合 E の和 $\cup E$ が開集合であることを証明する．P を $\cup E$ の任意の一点とすればある E に含まれる．E は開集合であるから適当に近傍 $U(P)$ を選んで $U(P)\subset E$ とできる．したがって $U(P)\subset\cup E$ となって P は $\cup E$ の内点であることがわかる．つぎに閉集合 E の積 $\cap E$ の閉集合であることは，$C(E)$ が開集合であるから $C(\cap E)=\cup C(E)$ から，いま証明したばかりの結果を用いて $C(\cap E)$ は開集合となりふたたび補集合を作れば，$\cap E=C(C(\cap E))$ は閉集合となる．

定理 4 と事情を異にして，

定理 5 有限個の開(閉)集合 $E_1, E_2, \cdots, E_m$ の積(和)は開(閉)集合である．

証明 $E_1, E_2, \cdots, E_m$ を開集合とし，積 $E_1\cdot E_2\cdots E_m$ の任意の一点を P とする．おのおのの $\nu(\nu=1,2,\cdots,m)$ に対して，適当に点 P の近傍 $U(P,\rho_\nu)$ をえらんで $U(P,\rho_\nu)\subset E_\nu$ となるようにしてつぎに $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_m$ の最小値を ρ_0 とすれば，

1) 個数が非可付番でもよい．

明らかに $U(P, \rho_0)\subset E_1\cdot E_2\cdots E_m$ である．したがって $\bigcap_{\nu=1}^{m} E_\nu$ は開集合である．$E_\nu\,(\nu=1, 2, \cdots, m)$ が閉集合であるとき $\bigcup_{\nu=1}^{m} E_\nu$ の閉集合になることは定理4と同様に補集合を作って容易にわかる．

注意 開集合の無限個の積は必ずしも開集合とならない．たとえば R_2 において E_ν として，開円板 $x^2+y^2<1/\nu^2\,(\nu=1, 2, \cdots)$ を取れば $\bigcap_{\nu=1}^{\infty} E_\nu$ は原点だけからなる．

さて，空集合および空間 R_n それ自身は開集合であり同時に閉集合でもある．空集合および R_n 以外に R_n の点集合で同時に開集合かつ閉集合であるものが存在しないことを示すためには，つぎの定理を用いるとよい．

定理 6 R_n の点集合 E があって $E\neq\emptyset$ かつ $C(E)\neq\emptyset$ であるならば，必ず E の境界点が存在する．

証明 簡単のため R_2 の場合だけを証明する．$P_0\in E$, $P_1\in C(E)$ として P_0 と P_1 とを結ぶ線分 g を考える．いま P_0 および P_1 の座標をそれぞれ (x_0, y_0) および (x_1, y_1) とすれば線分 g の方程式は

$$x=x_0+(x_1-x_0)t, \qquad y=y_0+(y_1-y_0)t,$$
$$\text{ただし}\quad 0\leqq t\leqq 1$$

となる．いま $0\leqq t\leqq 1$ に対応する線分 g 上の一点を P_t とすれば，$P_t\in E$ であるような t の上限を t_0 で表わすとき P_{t_0} は必ず E の境界点となる．$t_0=0$ または1の場合も同様であるから $0<t_0<1$ としよう．$t_0<t'$ とすれば $P_{t'}\in C(E)$, また正数 ε をいかに小に取っても $t_0-\varepsilon<t_1\leqq t_0$ かつ $P_{t_1}\in E$ である t_1 が存在する．したがって P_{t_0} の任意近傍に E の点と $C(E)$ の点が同時に含まれるから，P_{t_0} は E の境界点である．

注意 定理6の点集合 E が同時に開かつ閉になれないことは，E を開集合とすればその境界点を含まないし，また E を閉集合とすれば必ずその境界点を含むからである．なぜかといえば，E の境界点は E の点かそうでなければ E の集積点である．

注意 ついでながら，点集合 E の内点(外点)の集合を E の内部(外部)ということにすれば，容易にわかるように E の内部および外部は開集合である．またすでに述べたように，E の境界点の集合は閉集合である．いま E の内部，外部および境界点の集合をそれぞれ $I(E)$, $A(E)$ および B で表わすとき空間 R_n は $R_n=I(E)+B+A(E)$ と分解される．前注意によれば，閉集合 $I(E)+B$ は E とその導集合 E' との和集合であることがわかる．すなわち $E\cup E'$ は閉集合でしばしばこれを E の**閉包**ということがある．

定理7 開集合は内点を共有しない閉矩形の可付番無限個の和として表わすことができる．

証明 簡単のため R_2 の場合だけを証明する．平面 R_2 上に無限に多くの網を張る．まず μ, ν を正，負の整数または 0 とし，閉正方形 Q_1: $\mu\leqq x\leqq\mu+1$, $\nu\leqq y\leqq\nu+1$ の全体 G_1 を第一の網という．G_1 のおのおのの閉正方形 Q_1 に整数の順序ある一対 (μ, ν) を対応させて見れば，容易にわかるように G_1 のすべての閉正方形 Q_1 の個数は可付番無限である．つぎに閉正方形 Q_2: $\mu/2\leqq x\leqq(\mu+1)/2$, $\nu/2\leqq y\leqq(\nu+1)/2$ の全体 G_2 を第二の網と名付け，以下同様にして一般に閉正方形 Q_m: $\mu/2^{m-1}\leqq x\leqq(\mu+1)/2^{m-1}$, $\nu/2^{m-1}\leqq y\leqq(\nu+1)/2^{m-1}$ の全体 G_m を m 番目の網 $(m=1, 2, \cdots)$ という．G_1 と同様に一般に G_m のすべての閉正方形 Q_m の個数が可付番無限であることは明らかであろう．平面上の任意の一点 P はすべての自然数 m に対して網 G_m の少なくとも一つ(多くとも四つ)の閉正方形 Q_m に含まれることはいうまでもない．つぎに E を平面上の開集合とすれば，E のおのおのの点 P のある近傍 $U(P, \rho)$ は E に含まれるから，自然数 m を十分大きく取れば P を含むいかなる閉正方形 Q_m も $U(P, \rho)$ したがって E に含まれることに注意しよう[1]．すなわち E のおのおのの点 P に対しては P を含んでそれ自身は E に含まれるある閉正方形 Q_m が存在することがわかったわけである．第一の網 G_1 の閉正方形 Q_1 で E に含まれるものの全部の和集合を G_1^*，つぎ

1) Q_m の対角線の長さ $\sqrt{2}/2^{m-1}$ が ρ より小であるような m を取ればよい．

に第二の網 G_2 の閉正方形 Q_2 で E に含まれるもののうち G_1^* には含まれないもの全部の和集合を G_2^*，以下同様に続けて一般に G_m の閉正方形 Q_m で E には含まれるが $\bigcup_{i=1}^{m-1} G_i^*$ には含まれないもの全部の和集合を G_m^* とすれば，ここに無限系列 $G_i^*\ (i=1, 2, \cdots)$ が得られ，G_i^* は互いに内点を共有しない高々可付番無限個の閉正方形の和集合であって，そればかりでなく $E=\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i^*$ であることがつぎのようにして証明される．まず，G_m^* の定め方から $\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i^* \subseteqq E$ であることは明らかである．つぎに，P を E の任意の一点とするとき P を含んでしかもそれ自身は E に含まれる Q_m がある．さて $Q_m \subseteqq G_1^* \cup G_2^* \cup \cdots \cup G_{m-1}^*$ であるかそうでなければたしかに $Q_m \subseteqq G_1^* \cup G_2^* \cup \cdots \cup G_m^*$ である．いずれにしても $P \in \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i^*$ となるから $E \subseteqq \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i^*$ であることがわかる．

注意 この定理の系として，開集合は可付番無限個の閉集合の和で表わされる．したがって補集合を作って見れば，閉集合は可付番無限個の開集合の積で表わされるわけである．

つぎに，一次元空間 R_1 に特別な定理としては，

定理8 R_1 における開集合は互いに素[1]な開区間の有限または可付番無限個の和で表わされる．

証明 E を数直線 R_1 上の開集合とする．x を E の一点とすれば，x を含む開区間で E に含まれるものがある．閉区間 $[x, x+\rho]$ が E に含まれるような ρ の上限を ρ_1 とすれば $x+\rho_1 \notin E$，同様に $[x-\rho, x]$ が E に含まれるような $-\rho$ の下限を $-\rho_2$ とすれば $x-\rho_2 \notin E$ である．開区間 $(x-\rho_2, x+\rho_1)$ は E の点ばかりからなる開区間であってこれを I_x で表わして x に対応させる．E のおのおのの点 x に対して上の方法で開区間 I_x を作れば，相異なる I_x のすべての集合を M で表わすとき M の相異なる二つの開区間 I_1, I_2 は共通点を持たない；なぜかといえば，仮に I_1 および I_2 に共通点 x があったとすれば $I_1=I_2=I_x$ となって不都合が起る．こうして見ると M の要素である開区間の個数は有限かまた

1) いずれの二つも共通点をもたないことを意味する．

は可付番無限であって[1]しかも E はこれらの開区間の和集合である.

注意 定理 8 は $R_n\,(n\geqq 2)$ の場合にはこのままの形では成立しない.

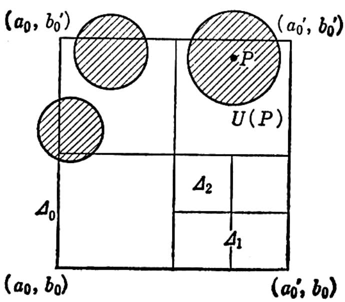
4. 被覆定理とその応用

本節では，簡単のために平面上の点集合について考える．ただし定理そのものは一般の n 次元空間 R_n の点集合についても成立することをあらかじめ注意しておく，点集合論の中でもっとも応用の多い被覆定理はボレル=ルベーグ(Borel-Lebesgue)の被覆定理とリンデレーフ(E. Lindelöf)の被覆定理であろう．最初にボレル=ルベーグの定理を説明しよう．

まず平面上に点集合 E があって，原点を中心に十分大きな半径の円をえがいたときその内部に E が含まれるならば，E を有界であるという．有界な閉集合についてはボレル=ルベーグの定理と呼ばれる重要な定理がある．この定理の特別の場合から始めよう．

定理 平面上の閉正方形 $\varDelta_0$: $a_0\leqq x\leqq a_0'$, $b_0\leqq y\leqq b_0'$ のおのおのの点 P に点 P のある近傍 $U(P)$ が対応するものとする．このときすべての $U(P)$ の中から適当に有限個をえらんで $\varDelta_0$ のどの点もこれらの少なくとも一つに含まれるようにできる.

証明 縮小法によって証明する．まず $\varDelta_0$ の相対する二辺の中点をそれぞれ



第 4 図

---

1) 第 6 章第 11 節定理 10 を見よ.

線分で結べば，Δ_0 は四つの閉正方形 $\Delta_1, \Delta_1', \Delta_1'', \Delta_1'''$ に分けられる．これらのどの一つを考えてもそのおのおのの点 P には近傍 $U(P)$ が対応していることに注意して，われわれの定理が閉正方形 $\Delta_1, \Delta_1', \Delta_1'', \Delta_1'''$ のいずれに対しても成立するとすれば，初めの閉正方形 Δ_0 に対しても成立することは明かであろう．われわれは Δ_0 に対して定理が成立しないと仮定しよう．こうすれば，当然 Δ_1, $\Delta_1', \Delta_1'', \Delta_1'''$ のいずれか一つに対して定理は成立しないことになる．これを

$$\Delta_1 :\ a_1 \leqq x \leqq a_1',\ b_1 \leqq y \leqq b_1'$$

としよう．つぎに，Δ_1 を同じ方法で四等分して四つの閉正方形に分ければ，前と同様な議論でこれらの少なくも一つの閉正方形

$$\Delta_2 :\ a_2 \leqq x \leqq a_2',\ b_2 \leqq y \leqq b_2'$$

に対してわれわれの定理は成立しない．この操作を限りなく続けて行けば，われわれの定理が成立しないような閉正方形の無限系列 $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_\nu, \cdots$ が得られる．明らかに $\nu<\nu'$ ならば $\Delta_{\nu'}$ は Δ_ν に含まれかつ Δ_0 の辺の長さを l とすれば Δ_ν の辺の長さは $l/2^\nu$ である．これよりすべての Δ_ν に共通な点は存在してもただ一つである．他方において，すべての Δ_ν に共通な一点 P_0 の存在はつぎのようにして証明される．Δ_ν の作り方からわかるように

$$a_0 \leqq a_1 \leqq \cdots \leqq a_\nu \leqq \cdots \leqq a_\nu' \leqq \cdots \leqq a_1' \leqq a_0',$$

$$b_0 \leqq b_1 \leqq \cdots \leqq b_\nu \leqq \cdots \leqq b_\nu' \leqq \cdots \leqq b_1' \leqq b_0'$$

であるから $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu=\xi$, $\lim\limits_{\nu\to\infty} b_\nu=\eta$ とおけば，すべての自然数 ν に対して

$$a_\nu \leqq \xi \leqq a_\nu', \quad b_\nu \leqq \eta \leqq b_\nu'$$

が成立する．$P_0=(\xi,\eta)$ とおけば点 P_0 がすべての Δ_ν に共通に含まれることは明らかであろう．さて P_0 には $U(P_0)$ なる近傍が対応しているはずである．いま十分大きな自然数 ν を取れば Δ_ν のおのおのの点はただ一個の近傍 $U(P_0)$ に含まれることになって[1] Δ_ν の定め方に矛盾するという結果になる．

いま証明した定理はつぎのような形に拡張される．

---

1) $\nu\to\infty$ ならば $l/2^\nu\to 0$ であることを用いる．

ボレル=ルベーグの定理　有界閉集合 E があって E のおのおのの点 P に点 P のある近傍 $U(P)$ が対応しているとすれば，すべての $U(P)$ の中から適当に有限個をえらんで，E のいずれの点もその少なくとも一つに必ず含まれるようにできる．

証明　有界な閉集合 E を完全に内部に含むような閉正方形を $\varDelta$ とする．閉集合 E に属さない平面上の任意の一点 Q に対しては Q の適当な ρ 近傍の一つを $V(Q)$ で表わせば，$V(Q)$ の中には E の点が存在しないようにできる（なぜならば，$C(E)$ は開集合）．いま $\varDelta$ のおのおのの点 P に，P が E に属するときは近傍 $U(P)$ を対応させ，P が E に属さないときは上に述べた $V(P)$ を対応させれば，いま証明したばかりの定理によってこれらの $U(P)$ および $V(P)$ の中から適当に有限個をえらんで $\varDelta$ のおのおのの点がこれらの少なくとも一つに必ず含まれるようにできる．いまえらばれた有限個の $U(P)$ を $U(P_1), U(P_2), \cdots, U(P_m)$ として，$V(P)$ の中には E の点が含まれないことに注意すれば，E を被うためには $U(P_1), U(P_2), \cdots, U(P_m)$ だけで十分であろう[1]．

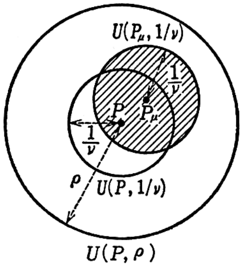
注意　この定理はひじょうに応用が多い．この定理の内容を単に有界な閉集合は適当な有限個の近傍でつねに被うことができるというように漠然と考えてはならない．これだけのことならば，閉集合でなくとも有界な集合は原点を中心とする十分大きな半径 R の円の内部すなわち原点の R 近傍ただ一つで被うことができることは始めから明らかである．有界な閉集合 E のおのおのの点 P にいかなる ρ 近傍 $U(P)$ があらかじめ与えられていてもその $U(P)$ の中の適当な有限個で E を被うことができるというのである．有界および閉集合のいずれか一方の仮定がなくともこの定理は成立しない．ν を自然数として $P_\nu=(\nu, 0)\ (\nu=1, 2, \cdots)$ からなる無限集合は閉集合であっておのおのの点 P にその $1/3$ 近傍を $U(P)$ として対応させれば，このような $U(P)$ の有限個で E を被うことは

1)　E のおのおのの点が $U(P_1), U(P_2), \cdots, U(P_m)$ の少なくとも一つに含まれることをしばしばこれら m 個の近傍は E を被うという．

明らかにできないであろう．また ν を自然数として $P_\nu=(1/\nu, 0)$ のすべての集合を E とすれば，E は有界であるが閉集合ではない．おのおのの点 P_ν に ρ が $[3\nu(\nu+1)]^{-1}$ に等しい ρ 近傍を $U(P)$ として対応させれば，この $U(P)$ の有限個では E を被うことはできない．

つぎにリンデレーフの被覆定理を説明するためには少しく準備を必要とする．平面上の有理点 (x, y)，ただし x および y はともに有理数，のすべての集合を A で表わすとき A は可付番無限集合したがって A の点の全部を $P_\mu(\mu=1, 2, \cdots)$ と点列の形にならべることができる．つぎにおのおのの点 P_μ の $1/\nu$ 近傍(ただし ν は自然数)を $U_{\mu,\nu}$ で表わすとき $U_{\mu,\nu}$ に自然数の一対(μ, ν)を対応させて見れば容易にわかるように，$U_{\mu,\nu}$ のすべての集合は可付番無限である．

さて P を平面上の任意の一点，$U(P, \rho)$ をその任意の近傍とする．いま自然数 ν を $1/\nu<\rho/2$ となるようにえらんで $U(P, \rho)$ と同心な近傍 $U(P, 1/\nu)$ 内に任意に一つの有理点 P_μ を取る．このとき容易にわかるように $U(P_\mu, 1/\nu)\equiv U_{\mu,\nu}$ は P を含みしかもそれ自身は $U(P, \rho)$ に含まれる．この事実をわれわれはリンデレーフの定理の証明に用いようというのである．



第5図

リンデレーフの被覆定理　平面上の任意の点集合を E とし，E のおのおのの点 P には P のある近傍 $U(P)$ が対応するものとする．このとき $U(P)$ の中から適当に高々可付番無限個を選んで，E のいずれの点もその少なくとも一つに必ず含まれるようにできる[1)]．

---

1) リンデレーフの定理は E が非可付番無限のときにだけ意味を持つ．

証明 さきに注意した可付番無限個の近傍 $U_{\mu,\nu}$ $(\mu, \nu=1, 2, \cdots)$ を利用する. E のおのおのの点 P を含んでしかもそれ自身は $U(P)$ に含まれる $U_{\mu,\nu}$ の一つを P に対してただ一つ適当にえらび，これを $V(P)$ で表わす．P が E の中をくまなく動くとき得られる相異なる $V(P)$ の全部は有限または可付番無限な集合を形作る；いまこの全部を $V_1, V_2, \cdots, V_n, \cdots$ としよう．明らかに

$$E \subseteqq V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_n \cup \cdots$$

である．いまおのおのの V_n に対してこれを含む $U(P)$ の一つを $U(P_n)$ とすれば, $V_n \subseteqq U(P_n)$ $(n=1, 2, \cdots)$ であるからたしかに

$$E \subseteqq U(P_1) \cup U(P_2) \cup \cdots \cup U(P_n) \cup \cdots$$

である.

今度はこれらの被覆定理の応用を説明しよう.

まず点集合 E の集積点が存在する場合は当然 E は無限点集合であるが，逆に無限点集合には必ずしも集積点が存在しないことはすでに注意の中で一例を示しておいた．しかしながら，有界という条件のもとでは逆が成立する.

定理 1 有界な無限点集合 E には必ず集積点が存在する(ボルツァノ=ワイエルシュトラス(Bolzano-Weierstrass)の定理).

証明 E の集積点が存在しないと仮定しよう．いま E を完全に内部に含む閉正方形を Δ で表わし，Δ のおのおのの点 P に E の点を高々有限個を含むような点 P の ρ 近傍の一つを $U(P)$ として対応させれば，ボレル=ルベーグの定理によってこのような $U(P)$ の有限個で Δ を被うことができる．したがって E は有限集合でなければならない.

なお無限点集合の代りに無限点列としてもこの定理は成立する.

定理 2 有界な無限点列 P_ν $(\nu=1, 2, \cdots)$ には必ずその集積点が存在する(ボルツァノ=ワイエルシュトラスの定理).

証明 まずこの点列の項に含まれる相異なる点のすべてが有限集合を作る場合にはわれわれの主張の正しいことは明らかであろう．なぜならば，ある同一

の点が無限に多くの項に含まれるからである．そうでない場合にはおのおのの項が相異なる点ばかりからなる部分点列 P_{ν_n} $(n=1,2,\cdots)$ が存在してこれの作る無限集合を E で表わせば，いま証明したばかりの定理によって E の集積点が存在する．

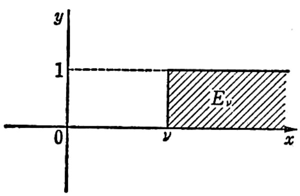
ワイエルシュトラスの定理の応用としてつぎに二つの定理を説明する．前者はしばしば**共通部分定理**と呼ばれる．

定理 3　空でない有界閉集合 E_ν ばかりからなる単調減少系列 $E_1 \supseteqq E_2 \supseteqq \cdots \supseteqq E_\nu \supseteqq \cdots$ があるときすべての E_ν の共通部分 $\bigcap_{\nu=1}^{\infty} E_\nu$ は空集合ではない[1]．

証明　すべての自然数 ν に対して $E_\nu \neq \emptyset$ であるから E_ν の一点を P_ν で表わそう．こうすれば有界な点列 P_ν $(\nu=1,2,\cdots)$ が得られ[2]，ワイエルシュトラスの定理によりこの点列の集積点が存在する．いま集積点の一つを Q で表わせば，点列 P_ν $(\nu=1,2,\cdots)$ は閉集合 E_1 の点ばかりからなるから容易にわかるように Q は E_1 に属する．同様に一般に n を任意の自然数としたとき，部分点列 P_ν $(\nu=n,n+1,\cdots)$ は閉集合 E_n の点ばかりからなるから P_ν $(\nu=n,n+1,\cdots)$ の集積点 Q は E_n に含まれる．すなわち Q はすべての E_ν $(\nu=1,2,\cdots)$ の共通点である．

注意　定理3において有界という仮定は重要である．たとえば $x \geqq \nu, 0 \leqq y \leqq 1$ を満足する (x,y) のすべての集合を E_ν で表わせば，E_ν $(\nu=1,2,\cdots)$ は単調減少な閉集合列であるが $\bigcap_{\nu=1}^{\infty} E_\nu$ は空集合である（第6図）．

例　定理3を補集合を用いて少しく変形して見よう．E を有界閉集合でかつ



第6図

1)　$\bigcap_{\nu=1}^{\infty} E_\nu$ が閉集合であることはいうまでもない．

2)　P_ν $(\nu=1,2,\cdots)$ は E_1 の点ばかりから成るから明らかに有界である．

空でないものとする．いま開集合 $G_\nu\ (\nu=1,2,\cdots)$ は単調増加すなわち

$$G_1 \subseteqq G_2 \subseteqq \cdots \subseteqq G_\nu \subseteqq \cdots$$

であってその極限集合 $G=\lim_{\nu\to\infty} G_\nu=\bigcup_{\nu=1}^{\infty} G_\nu$ は E を含むものとする．このときある ν に対して E は必ず G_ν に含まれる．

なぜかといえば，仮にすべての ν に対して E が G_ν に含まれないとすれば

$$E\cdot C(G_\nu) \equiv E_\nu \neq \emptyset \qquad (\nu=1,2,\cdots),$$

E_ν は有界な閉集合ばかりからなる単調減少系列であるから

$$\bigcap_{\nu=1}^{\infty} E_\nu \neq \emptyset$$

である．しかるに

$$E\cdot C(G) = E\cdot C(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} G_\nu) = E\cdot \bigcap_{\nu=1}^{\infty} C(G_\nu) = \bigcap_{\nu=1}^{\infty} E_\nu \neq \emptyset$$

となって，E が G に含まれるという仮設にそむくことになる．

平面上に二つの点集合 E_1 および E_2 があって，二点 P_1 および P_2 はそれぞれ E_1 および E_2 の中の動点とし，すべての相異なる距離 $r(P_1,P_2)$ の集合 M の下限を E_1 と E_2 との距離といい，これを $r(E_1,E_2)$ で表わす．特に，E_1 が一点 P_1 だけからなるときは，$r(E_1,E_2)$ は P_1 から E_2 にいたる距離を表わし，これを $r(P_1,E_2)$ と書くのである．

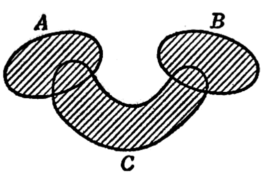
注意 P,Q を点，A,B,C を点集合としたとき

$$r(P,A) \leqq r(A,Q)+r(Q,P)$$

および

$$r(A,B) \leqq r(A,Q)+r(Q,B)$$

は成立するがこれに反して



第7図

$$r(A, B) \leqq r(A, C)+r(C, B)$$

は成立しない．さらに $r(A, B)$ は P が A 内をくまなく動くときの $r(P, B)$ の下限に等しいことも容易に証明できる．

定理4　E_1 および E_2 を閉集合とし，その少なくとも一方たとえば E_1 を有界とすれば，E_1 および E_2 の中にそれぞれ一点 $P_0^{(1)}$ および $P_0^{(2)}$ をえらんで

$$r(E_1, E_2) = r(P_0^{(1)}, P_0^{(2)})$$

とできる．したがって特にこの場合において E_1 および E_2 に共通点がなければ

$$r(E_1, E_2) > 0$$

である．

証明　$P^{(1)} \in E_1$, $P^{(2)} \in E_2$ とし距離 $r(P^{(1)}, P^{(2)})$ の集合 M を作れば M の中に必ず最小数が存在することを証明しよう．まず M の下限を d で表わせば d が最大下界であることから，おのおのの自然数 ν に対して

$$d \leqq r(P_\nu^{(1)}, P_\nu^{(2)}) < d+\frac{1}{\nu} \qquad (\nu=1, 2, \cdots)$$

が成り立つように E_1 および E_2 からそれぞれ一点 $P_\nu^{(1)}$ および $P_\nu^{(2)}$ をえらぶことができる．E_1 の有界であることから有界点列 $P_\nu^{(1)}\,(\nu=1, 2, \cdots)$ には必ず集積点が存在する(ワイエルシュトラスの定理)．この集積点の一つを $P_0^{(1)}$ で表わせばすでに述べてあるように適当な部分列 $P_{\nu_n}^{(1)}\,(n=1, 2, \cdots)$ をえらび $P_0^{(1)}$ がその極限点であるようにできる．つぎに点列 $P_\nu^{(2)}\,(\nu=1, 2, \cdots)$ の部分列 $P_{\nu_n}^{(2)}$ $(n=1, 2, \cdots)$ は不等式

$$d \leqq r(P_{\nu_n}^{(1)}, P_{\nu_n}^{(2)}) < d+\frac{1}{\nu_n} \qquad (n=1, 2, \cdots)$$

からもわかるように当然有界であって前と同様な議論を繰り返すことができて，部分列 $P_{\nu_n}^{(2)}\,(n=1, 2, \cdots)$ からさらに適当な部分列をえらべばその極限点 $P_0^{(2)}$ が存在するようにできる．いま言葉の節約のために，部分列 $P_{\nu_n}^{(2)}\,(n=1, 2, \cdots)$ 自身が $P_0^{(2)}$ を極限点とすると仮定しよう．こうすれば容易に

$$\lim_{n\to\infty} r(P_{\nu_n}^{(1)}, P_{\nu_n}^{(2)}) = r(P_0^{(1)}, P_0^{(2)}),$$

したがって前の不等式から $d=r(P_0^{(1)}, P_0^{(2)})$ であることがわかる. $d=r(E_1, E_2)$ が M に属することをいうためには, $P_0^{(1)}$ および $P_0^{(2)}$ がそれぞれ E_1 および E_2 に属することを示せばよろしい. E_1 および E_2 が閉集合であるからこのことはほとんど明らかである.

注意 定理において E_1, E_2 がともに閉集合であることと少なくとも一方が有界であることが大切である. E_1 を一点 $(1, 0)$ からなる集合, E_2 を $x^2+y^2 \leqq 1$ かつ $(x, y) \neq (1, 0)$ を満足する点 (x, y) のすべての集合とすれば, M の中には最小数はない. なぜならば $r(E_1, E_2)=0$. つぎに双曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ が表わす閉集合を E_1, その二つの漸近線上のすべての点の集合を E_2 とするとき, E_1 および E_2 はともに閉集合であって $r(E_1, E_2)=0$ であるが, E_1 および E_2 は共通点を持たない.

一般に点集合 E があって, E のおのおのの点 P に一つの実数 $f(P)$ が対応するとき, E を変域とする函数 $f(P)$ が定義される. このとき E の一点 P_0 において連続であるというのは, 正数 ε を任意に与えたとき適当に P_0 の近傍 $U(P_0)$ を定めると $U(P_0)$ に属する E のいかなる点 P に対しても

$$|f(P)-f(P_0)| < \varepsilon$$

が成立することである. $f(P)$ が E のおのおのの点において連続である時簡単に $f(P)$ は E において連続であるという. さて $f(P)$ を E において連続とし正数 ε を任意に与えた時 E のおのおのの点 P_0 の適当な ρ 近傍 $U(P_0, \rho)$ を定めれば

$$P \in E \cdot U(P_0, \rho) \quad \text{ならば} \quad |f(P)-f(P_0)| < \varepsilon$$

が成立する; このとき $U(P_0, \rho)$ の半径 ρ は正数 ε に従属することはいうまでもないがなお P_0 にも依存するのであって, E のすべての点 P_0 に共通な半径 ρ の近傍を対応させることができるとは限らない. この最後に述べたことが可能な場合, くわしくいえば, 正数 ε を任意に与えたとき, 正数 ρ を適当にえらべば P_0 が E のいかなる点であっても

$$P \in E \cdot U(P_0, \rho) \quad \text{である限り} \quad |f(P)-f(P_0)| < \varepsilon$$

が成立するようにできる場合に $f(P)$ を E において**一様に連続**であるという．以上の準備の後にふたたびボレル=ルベーグの定理を応用して有界閉集合を変域とする連続函数に関する重要な二つの定理を証明できる．

定理5　有界閉集合 E において連続な函数 $f(P)$ は E において有界であって，必ず最大値と最小値を取る．

証明　P_0 を E の一点とすれば，P_0 の適当な近傍 $U(P_0)$ と E との共通部分において $|f(P)-f(P_0)|<1$ が成立する．したがって $1+|f(P_0)|$ を $M(P_0)$ とおけば

$$P \in E\cdot U(P_0) \quad \text{ならば} \quad |f(P)| < M(P_0)$$

となる．E のおのおのの点 P_0 にこのような近傍 $U(P_0)$ を対応させれば，ボレルの定理によって $U(P_0)$ の中の適当な有限個で E を被うことができる．この有限個の近傍を $U(P_1), U(P_2), \cdots, U(P_m)$ とすれば

$$P \in E\cdot U(P_i) \quad \text{ならば} \quad |f(P)| < M(P_i) \qquad (i=1, 2, \cdots, m)$$

となるから，$M(P_1), M(P_2), \cdots, M(P_m)$ の最大値を M で表わすとき E のおのおのの点 P において $|f(P)|<M$ が成立する．こうして $f(P)$ は E において有界であることがわかる．われわれは $f(P)$ の E における値の集合の上限および下限をそれぞれ G および g で表わすことにする．明らかに，E のすべての点で $g \leqq f(P) \leqq G$ であるが E の適当な点において等号の成立することを証明しよう．仮に E のおのおのの点において $f(P) \neq G$ とすれば，$F(P) \equiv \dfrac{1}{G-f(P)}$ は E において正値ばかりを取る連続函数であるからいま述べたばかりの事実によって $F(P)$ は E において有界となるはずである．われわれは E のおのおのの点 P において $|F(P)| \leqq K$ であると仮定しよう．他方において，G は $f(P)$ の E における値の集合の上限であるから，任意の正数 ε に対して E の一点 P_ε を適当に選んで $f(P_\varepsilon) > G-\varepsilon$ したがって $F(P_\varepsilon) > 1/\varepsilon$ が成立するようにできる．$\varepsilon < 1/K$ に取ってみればここに一つの矛盾に到達することがわかり，$f(P)$ は E において最大値を取ることがわかる．$f(P)$ が E において最小値を取ることも同様に証

明できる.

注意 たとえば$f(P)=1/\sqrt{x^2+y^2}$は原点を中心とする半径1の内部から原点を除いて得られる点集合Eで連続であるが有界でないことは明らかであろう. 区間$0<x<1$で連続な函数$f(x)\equiv x$は最大値も最小値も取らない.

定理6 有界閉集合Eで連続な函数$f(P)$は必ずEにおいて一様に連続である.

証明 まずεを任意の正数とする. Eのおのおのの点P_0において適当に半径$\rho(P_0)$の近傍$V(P_0)$を定めると,

$$P\in E\cdot V(P_0) \quad \text{ならば必ず} \quad |f(P)-f(P_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

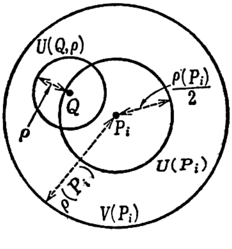
が成立するようにできる. いまEのおのおのの点P_0に$\rho(P_0)$の1/2に等しい半径を持ついわゆる$\rho(P_0)/2$近傍$U(P_0)=U(P_0, \rho(P_0)/2)$を対応させれば, ボレルの定理でこれらの$U(P_0)$の中から有限個たとえば$m$個$U(P_1), U(P_2), \cdots, U(P_m)$をえらんで$E$を被うことができる. これら$m$個の近傍の半径の最小なものを$\rho$で表わそう. つぎに$Q$を$E$のいかなる点としても

$$P\in U(Q, \rho)\cdot E \quad \text{である限り} \quad |f(P)-f(Q)|<\varepsilon$$

が成立することを証明しよう.

まず, QはEの点であるからm個の近傍のいずれか一つたとえば$U(P_i)$に含まれる. 簡単な不等式

$$r(Q, P_i)+\rho<\frac{\rho(P_i)}{2}+\frac{\rho(P_i)}{2}=\rho(P_i)$$



第8図

から，容易に

$$U(Q,\rho)\subset V(P_i)$$

であることがわかる．ゆえに

$$P\in E\cdot U(Q,\rho) \quad \text{ならば} \quad |f(P)-f(P_i)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

特に $U(Q,\rho)$ の中心 Q に対しても

$$|f(Q)-f(P_i)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

が成立し，したがって $P\in U(Q,\rho)\cdot E$ である限り

$$\begin{aligned}|f(P)-f(Q)| &= |f(P)-f(P_i)+f(P_i)-f(Q)|\\ &\leqq |f(P)-f(P_i)|+|f(P_i)-f(Q)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

つぎにリンデレーフの被覆定理の応用を説明しよう．ボレルの定理から集積点の存在に関するワイエルシュトラスの定理を導いたのとまったく同様にして凝集点について次の定理が得られる．

定理7　点集合 E の濃度を $\aleph_0$ よりも大であるとすれば，必ず E に属する E の凝集点が存在する．

証明　E のおのおのの点 P が E の凝集点でないとすれば，近傍 $U(P)$ を適当に定めて $U(P)\cdot E$ は有限または可付番無限集合であるようにできる．さてリンデレーフの定理によれば，$U(P)$ の中の高々可付番無限個 $U(P_1), U(P_2), \cdots$ を適当に選んで $\bigcup U(P_i)$ で E を被うことができる．したがって $E=\bigcup E\cdot U(P_i)$ は高々可付番無限集合となって仮定にそむく．

注意　上の証明とまったく同様にして孤立点ばかりからなる集合（これをしばしば**孤立集合**という）は高々可付番無限集合であることがわかる．

定理8　任意の集合 E の凝集点の集合 K は完全集合である．

証明　E の凝集点の集合 K が閉集合であることは任意の集合の導集合が閉集合であるという定理の証明とまったく同様にしてわかる．ゆえに集合 K が自己稠密であることを証明すればよい．P を K の任意の一点とすれば，任意の

近傍$U(P, \rho)$とEとの共通部分$U(P, \rho)\cdot E$の濃度は$\aleph_0$よりも大である．したがって$U(P, \rho)-(P)$とEとの共通部分$\{U(P, \rho)-(P)\}\cdot E$の濃度もいうまでもなく$\aleph_0$より大であって，定理7によれば$\{U(P, \rho)-(P)\}\cdot E$に属する$\{U(P, \rho)-(P)\}\cdot E$の凝集点$Q$が存在する．$Q$が$P$と相異なる$C(P, \rho)$内の$E$の凝集点すなわち$K$の一点であることはいうまでもない．したがって$P$は$K$の集積点である．こうして$K$の自己稠密であることがわかる．

定理 9 任意の閉集合は完全集合と高々可付番無限な集合の和で表わすことができる(カントル=ベンディクソン(Cantor-Bendixon)の定理).

証明 Eを閉集合とすればEの凝集点の集合KはEの部分集合である．なぜかといえば，Eの凝集点はEの集積点である．いま$E-K$をAとおけば，Aのおのおのの点はEの凝集点でないからなおさらAの凝集点ではない，したがって定理7によってAは高々可付番無限な集合でなければならない

定理 10 空でない完全集合Eの濃度は$\aleph_0$よりも大である[1].

証明 仮にEを可付番無限であるとし

$$E=\{P_1, P_2, \cdots, P_\nu, \cdots\}$$

としよう．Eは自己稠密であるからP_1はEの集積点である．ゆえにP_1と相異なるEの点が無限に多く存在する．その一つをQ_1とし，Q_1の近傍U_1を十分小に取ってU_1の中にはP_1が含まれないようにする．Q_1もまたEの集積点であるからU_1の中に無限に多くのEの点の含まれることはいうまでもない．つぎに，U_1の中にP_2が含まれないときはU_1の半径の1/2を半径とするQ_1の近傍をU_2とし，U_1の中にP_2が含まれるときはP_2はEの集積点であるからU_1の中にP_2と相異なるEの点が無限に多く存在する．その一つをQ_2とし，Q_2の近傍U_2を

(1) $P_2 \notin U_2$,

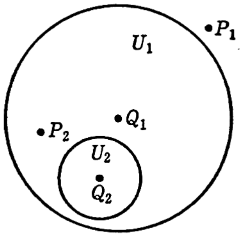
(2) $\overline{U_2} \subset U_1$，ただし$\overline{U_2}$は$U_2$の閉包,

---

1) 実はその濃度は$\aleph$となる.

(3) U_2 の半径は U_1 の半径の 1/2 よりも小,

であるように作る. U_2 の中に無限に多くの E の点が含まれるが, 明らかに P_1 および P_2 のいずれも U_2 には含まれない.



第9図

この方法を限りなく続けて行けば, 近傍の系列 $U_\nu(\nu=1, 2, \cdots)$ が得られ, その閉包 $\overline{U}_\nu(\nu=1, 2, \cdots)$ は単調減少

$$\overline{U}_1 \supseteqq \overline{U}_2 \supseteqq \cdots \supseteqq \overline{U}_\nu \supseteqq \cdots$$

である; おのおのの近傍 U_ν の中には無限に多くの E の点が含まれるがしかしながら $P_1, P_2, \cdots, P_\nu$ のいずれも含まれない. さて共通部分定理によれば $\bigcap_{\nu=1}^{\infty} \overline{U}_\nu$ は空でなくしかも U_ν の半径がたかだか U_1 の半径の $1/2^\nu$ であることに注意すれば $\bigcap_{\nu=1}^{\infty} \overline{U}_\nu$ はただ一点からなる. この点を P_0 で表わすとき, P_0 は容易にわかるように E の集積点であるから, E が閉集合である以上 P_0 は E に属する. こうして見ると P_0 は E のある点 P_μ と一致しなければならなくなり, 他方において P_0 は U_μ に含まれるから $P_1, P_2, \cdots, P_\mu$ のいずれとも相等しくはなり得ないという矛盾に達する.

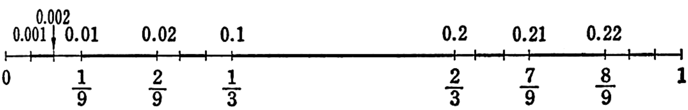
本節の最後に一次元空間 R_1 の集合でしばしば**カントルの集合**と呼ばれる完全集合の実例を付加しよう.

まず, すでに述べてあるように R_1 の開集合は互いに素な開区間の有限または可付番無限個の和に分解できる. したがってその補集合を作れば, R_1 の閉集合 E は R_1 より高々可付番無限個の開区間を取り除いて得られることになる. これらの開区間のおのおのを E の一つの補区間と名付ける. E を R_1 の閉集合

とするとき E の一点 P が孤立点であるならば P は明らかに二つの補区間の共通の端点でありその逆も明らかに成立する．こうして補区間に共通の端点が存在しないときかつこのときに限り閉集合 E は孤立点を持たないから完全集合となる．この事実を利用していわゆるカントルの集合を作って見よう．まず閉区間 $[0,1]$ を三等分して中央部の開区間 $(1/3, 2/3)$ を $[0,1]$ から取り去れば二つの閉区間 $[0,1/3]$ および $[2/3,1]$ が残る．つぎにこの二つの閉区間のおのおのを三等分してその中央部の開区間 $(1/9, 2/9)$ および $(7/9, 8/9)$ をこれら二つの閉区間から取り除けば残りは四つの閉区間からなり，そのおのおのを三等分しては中央部の開区間を取り除くという方法を限りなく続けて行けば，最後に残る集合 E が完全集合であることは明らかであろう．E の補区間の長さの総和を求めるには第一回の補区間 $(1/3, 2/3)$ の長さは $1/3$，第二回目の補区間 $(1/9, 2/9)$，$(7/9, 8/9)$ の長さはおのおの $1/3^2$，個数は 2 個であるから長さの和は $2\cdot\frac{1}{3^2}$，以下同様にして結局補区間の全長は

$$\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{3^2}+2^2\cdot\frac{1}{3^3}+\cdots=1$$

であることがわかる．また容易にわかるように，E は補区間の端点の集合およびその集積点とからなるのである．



第10図

注意 上に作ったカントルの集合が濃度 $\aleph$ を持つことは，つぎのようにして証明される．$[0,1]$ のおのおのの点を三進小数で表わすことにすれば，補区間 $(1/3, 2/3)$ は $(0.1, 0.2)$，また $(1/9, 2/9)$ は $(0.01, 0.02)$ で表わされる（図を参照）．結局 E の補区間はすべて $(0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{\nu-1}1,\ 0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{\nu-1}2)$，ただし α_ν は 0 と 2 ばかりからなる数字の形で表わされる．したがって $0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{\nu-1}1$ の代りに $0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{\nu-1}0222\cdots$ と書くことにすれば，E のおのおのの点は数字 1 を持たない三進

小数 $0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\nu\cdots$ で表わされ，その逆も成立する．E のおのおのの点 $0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\nu\cdots$ に一つの二進小数 $0.\beta_1\beta_2\cdots\beta_\nu\cdots$ を $\alpha_\nu=0$ または 2 にしたがってそれぞれ $\beta_\nu=0$ または 1 とおいて対応させて見れば，E は $0.\beta_1\beta_2\cdots\beta_\nu\cdots$ というすべての二進小数と対等となってその濃度が $\aleph$ であることがわかる．

5. 曲線，領域および連続体

本節でも平面上の点集合について考えることにしよう．まず曲線から始めよう．二つの函数

(1) $$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t)$$

を閉区間 $[a,b]$ における t の連続函数とすれば，t が a から b まで単調に変るとき(1)の点 (x,y) は平面上に一つの曲線 C をえがくであろう．このとき曲線 C は方程式(1)によって定義された，または(1)は曲線 C の方程式であるといい，このことを曲線 C: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)\,(a\leqq t\leqq b)$ という記号で表わす．また曲線 C において $(\varphi(a),\psi(a))$ を始点，$(\varphi(b),\psi(b))$ を終点と名付け，曲線 C は二点 $(\varphi(a),\psi(a))$ および $(\varphi(b),\psi(b))$ を結ぶともいい，$\varphi(a)=\varphi(b)$ かつ $\psi(a)=\psi(b)$ であるとき C を**閉曲線**，そうでないとき**開曲線**という．

例 $x=x_0+(x_1-x_0)t$, $y=y_0+(y_1-y_0)t\,(0\leqq t\leqq 1)$ は (x_0,y_0) と (x_1,y_1) とを結ぶ線分を表わし，$x=r\cos t$, $y=r\sin t\,(0\leqq t\leqq 2\pi)$ は原点を中心とする半径 r の円を表わす．

曲線 C: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)\,(a\leqq t\leqq b)$ が自分自身と切り合わないとき，明確にいえば，$t'=a$ かつ $t''=b$ である場合を除けば $a\leqq t'<t''\leqq b$ であるとき同時に

$$\varphi(t')=\varphi(t'') \quad \text{および} \quad \psi(t')=\psi(t'')$$

が成立しないならば，曲線 C は**単純である**または**ジョルダン(Jordan)曲線**であるという．上の例で考えた線分および円はそれぞれ単純開曲線および単純閉曲線のもっとも簡単なものである．線分を有限個連結して得られる曲線(必ずしも単純ではない)を屈折線という．一般には曲線 C は同一の点をいく度も通過

するのであって，曲線上の相異なる点全部の形作る点集合を E で表わすとき，E は容易にわかるように有界閉集合であるがひじょうに複雑な形状を持つことがある．たとえばペアノ (Peano) 曲線と呼ばれる曲線においては E が一つの正方形の内部を埋め尽すのである．しかしながら単純曲線にはこのような事情は起らない (すなわち E は内点を持たない)．曲線 C の形作る点集合 E のことを記号の節約のために C で表わすことがある．

つぎに領域と連続体の定義を述べよう．

開集合 D があって D を互いに素な (共通点を持たないことを意味する) 二つの空でない開集合に分解できないとき D を**領域**といい，また少なくとも二点を含む閉集合 K があって K を互いに素な二つの空でない閉集合に分解できないとき K を**連続体**という．たとえば円の内部，正方形の内部は領域であり，閉円板 $x^2+y^2\leqq r^2$，閉正方形および曲線の形作る点集合は連続体である．

定理 1 D が領域であるならば，D 内の任意の二点 P_0, Q_0 は D 内の点ばかりからなる曲線[1]で結ぶことができる．

証明 仮に，D のある二点 P_0, Q_0 が D 内の曲線で結ぶことができないとして矛盾の起ることを示せばよい．いま P_0 と D 内の曲線で結ぶことができる点全部の集合を D_1 で表わし，D から D_1 を取り去った残りの集合を D_2 で表わす．P_0 のある近傍 $U(P_0)$ の点は明らかに D_1 に含まれ，また Q_0 は D_2 に属するから D_1 および D_2 はいずれも空集合ではない．われわれはつぎに D_1 および D_2 のいずれも開集合であることを示そう．まず D_1 の任意の一点を P とし P の近傍 $U(P, \rho)$ を適当に定めて $U(P, \rho)\subset D$ とするとき $U(P, \rho)$ のおのおのの点 P_1 は $U(P, \rho)$ の中心 P と D 内の線分 $\overline{PP_1}$ で結ぶことができかつ P は P_0 と D 内のある曲線 L で結ぶことができるから，結局 P_1 は P_0 と D 内の点ばかりからなる曲線[2]で結ぶことができて $U(P, \rho)\subseteqq D_1$ であることがわかる．したがって

---

1) 屈折線と制限することもできる．

2) L と線分 $\overline{PP_1}$ とを連結した曲線を取ればよい．

D_1 は確かに開集合である．つぎに Q を D_2 の任意の一点としたとき $U(Q, \rho)$ を D に含まれるようにえらんだときいま述べたところから容易にわかるように $U(Q, \rho)$ は D_1 と共通点を持たない．したがって $U(Q, \rho)$ は D_2 の点ばかりからなり，D_2 もまた開集合であることがわかる．こうして開集合 D は互いに素な空でない開集合 D_1 および D_2 に分解されることになって，D が領域であるという仮設に反する．

逆に，

定理2　開集合 D があって，D 内のいかなる二点 P, Q を考えても D の点ばかりからなる曲線で結ぶことができるならば，D は領域である．

証明　仮に D が領域でなければ，二つの互いに素なしかも空でない開集合 D_1, D_2 を適当にえらんで D を D_1 と D_2 との和に分解できるはずである．いま P, Q をそれぞれ D_1, D_2 の一点とし，P を始点，Q を終点とする D の点ばかりからなる曲線を

$$C:\ x=\varphi(t),\ y=\psi(t) \qquad (0\leqq t\leqq 1)$$

とする．P は D_1 の内点であるから十分小なる正数 λ に対しては C の弧 C_λ: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)(0\leqq t\leqq\lambda)$ は D_1 に含まれる．そこで弧 C_λ が D_1 に含まれるような λ の上限を λ_0 とおけば，$0<\lambda_0\leqq 1$ であって C 上の一点 $P_{\lambda_0}=(\varphi(\lambda_0), \psi(\lambda_0))$ は容易にわかるように D_1 の境界点であるから開集合 D_1 には含まれない．したがって P_{λ_0} は D_2 に属することになって P_{λ_0} の適当な近傍 $U(P_{\lambda_0})$ は D_2 の点ばかりからなる；しかるに，他方において，P_{λ_0} は D_1 の境界点でもあるから $U(P_{\lambda_0})$ の中には D_1 の点も存在することになって D_1 と D_2 とが互いに素という仮設にそむく．

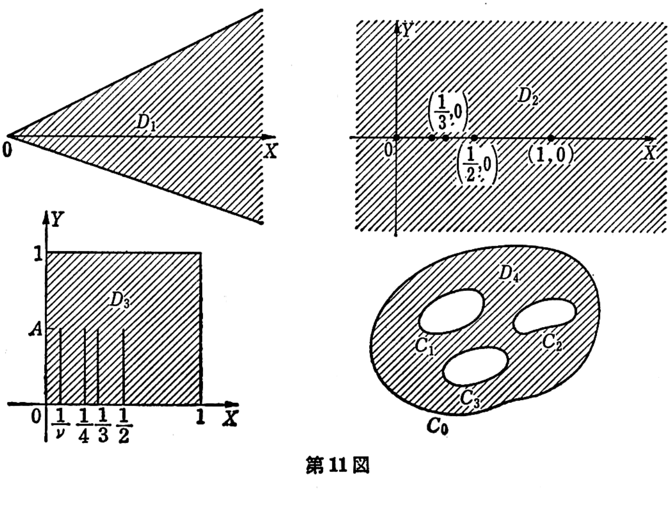
つぎに開集合 E の成分なるものを説明しよう．E の一点 P と E の点ばかりからなる曲線で結び得るような点 Q の全部の集合を D_P で表わせば，定理1の証明をかえりみて容易にわかるように D_P は領域である．われわれは D_P のことを点 P の決定する E の**成分**と名付けるのである．

定理 3　開集合 E は高々可付番無限個の互いに素な成分に分解できる．

証明　E のおのおのの点 P に対して一つの成分 D_P が得られるわけであるが，任意の二つの成分 D_{P_1} および D_{P_2} はこれらが共通点 Q を持つとすれば必ず一致する．なぜかといえば P_1 と Q とは D 内の曲線 L_1 で結ばれまた Q は P_2 と D 内の曲線 L_2 で結ばれるから P_1 と P_2 とは結局 D 内の曲線 L_1+L_2 で結ばれる．したがって D_{P_2} のおのおのの点は P_1 と D 内の曲線で結ばれることがわかり $D_{P_2}\subseteqq D_{P_1}$，またこの議論を逆にすれば $D_{P_1}\subseteqq D_{P_2}$ となるから $D_{P_1}=D_{P_2}$ がわかる．いま E の相異なる成分 D_P の集合を M とすれば，M は互いに素な成分ばかりからなり，したがってその個数は高々可付番無限であって[1] M のすべての成分の和集合が E と一致することはいうまでもないであろう．

注意　平面上の互いに素な開集合の個数が高々可付番無限であることはおのおのの開集合にその中に含まれる有理点を対応させて見れば容易にわかる．

つぎに領域の実例を少しくあげる：D_1 は角領域と呼ばれるもの；D_2 は平面から点列 $P_\nu=(1/\nu,0)(\nu=1,2,\cdots)$ および $(0,0)$ を取り除いて得られる領域；D_3



第 11 図

1)　つぎの注意を見よ．

は開正方形 $0<x<1$, $0<y<1$ から図のように無限に多くの線分 $x=1/\nu\,(\nu=2, 3, \cdots)$, $0<y\leqq 1/2$ を取り除いて得られる領域；D_4 は有限個の単純閉曲線で囲まれた領域を示す.

注意 平面上の単純閉曲線 C は平面を二つの領域 D_1 および D_2 に分け(その有界な方を C の内部, 有界でない方を C の外部という)しかも C は D_1 および D_2 の共通の境界であるという事実を**ジョルダンの曲線定理**といい, その厳格な証明はひじょうにむずかしい.

注意 領域 D 内の点ばかりからなる曲線

$$L: \quad x=\varphi(t), \;\; y=\psi(t) \qquad (0\leqq t<1)$$

があって, $\lim_{t\to 1}\varphi(t)=a$, $\lim_{t\to 1}\psi(t)=b$ が存在し点 (a, b) が D に属さないとき L は点 (a, b) の上に D の**到達可能な境界点**を定めるという. 上に示した領域 D_1, D_2, D_4 のおのおのの境界点は到達可能であるが, D_3 の線分 OA (ただし A を除く)上のおのおのの点は到達不可能な境界点である.

つぎに連続体に関する定理を少しく説明しよう.

定理 4 連続体 K が点集合 E およびその補集合 $C(E)$ と共通点を持つならば K は E の境界点を含む.

証明 $\overline{E}$ および $\overline{C(E)}$ をそれぞれ E および $C(E)$ の閉包とすれば, $R_2=\overline{E}\cup\overline{C(E)}$ であるから $K=K\cdot R_2=K\cdot\overline{E}\cup K\cdot\overline{C(E)}$ となる. しかるに $K\cdot\overline{E}\neq\emptyset$ かつ $K\cdot\overline{C(E)}\neq\emptyset$ であるから, $K\cdot\overline{E}$ および $K\cdot\overline{C(E)}$ が閉集合である以上 $K\cdot\overline{E}\cdot\overline{C(E)}\neq\emptyset$ である. したがって $\overline{E}\cdot\overline{C(E)}$ が E の境界点の集合 B を表わすことに注意すれば, $K\cdot B\neq\emptyset$ である.

定理 5 連続体 K の濃度は $\aleph$ である.

証明 いま二点 $P=(a, b)$, $Q=(c, d)$ が K に属するとし, $a<c$ と仮定しよう. いま $a<x_0<c$ なる任意の実数 x_0 に対して左半平面 E: $x<x_0$ を考えれば, K は E およびその補集合 $C(E)$ と共通点を持つから必ず K は E の境界点 P_{x_0} を含む. 点 P_{x_0} が直線 $x=x_0$ 上にあることは明らかである. x_0 を (a, c) 内を動かし

て見れば，K の濃度は少なくとも $\aleph$ であることがわかり，他方において R_2 の濃度が $\aleph$ であることから K の濃度は正確に $\aleph$ である．

定理 6 E を有界な閉集合でかつ連続体でないとすれば，E と交らないような単純な閉多辺形 π を定め[1] π の内部にも外部にも E の点が存在するようにできる．

証明 E は連続体でないから，E_1 および E_2 を互いに素な空でない閉集合とし，$E=E_1+E_2$ と表わすことができる．E_1 および E_2 は有界閉集合であるからその距離 ε は正である．いま平面を一辺が $\varepsilon/4$ であるような正方形の網に分けて，その正方形の内部かまたは周上に E_1 の点を少なくとも一つ含む閉正方形を W で表わし，すべての W の和を作ればその内部は明らかに開集合で一つまたはいくつか(有限個)の領域 $D_0, D_1, \cdots, D_m$ に分解される．おのおのの D_i は内部に必ず E_1 の点を含むがその境界には E の点を含まない．なぜかといえば，仮に E の点 P が D_i の境界上にあるとすれば，これは D_i に含まれるある W の境界点でなければならないから P は E_1 に属するわけには行かない，したがって P は E_2 に属するより仕方がない．しかるにこの正方形 W の内部または周上に E_1 の点 P_1 が含まれるから $r(P, P_1)\leqq\varepsilon\sqrt{\dfrac{1}{4^2}+\dfrac{1}{4^2}}=\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{8}}$ となり $r(E_1, E_2)=\varepsilon$ と矛盾する．いま一つの D_i たとえば D_0 を考え，D_0 のもっとも外側の境界の単純な閉多辺形を π_0，内側の境界の単純な閉多辺形を $\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_k$ とする．π_0 の外部に E_2 の点があれば π_0 はわれわれの求める π に取れる．そうでないときは E_2 の点は $\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_k$ の少なくとも一つの中に存在する．たとえばそれを π_1 とすれば，この π_1 を π に取れば定理は成立する．

定理 7 有界な連続体 $E_\nu\,(\nu=1, 2, \cdots)$ の単調減少系列があったときその極限集合 $E=\bigcap\limits_{\nu=1}^{\infty} E_\nu$ は一点よりなるか，そうでなければ E は連続体である．

証明 仮に E が連続体でなければ，定理 6 によって適当に単純な閉多辺形 π を選んで π の内部および外部に E の点を含みかつ π 上には E の点がないよう

1) 閉屈折線を意味する．

にできる. π の内部の E の一点を P, π の外部の E の一点を Q とすれば, すべての自然数 ν に対して E_ν は π の内部の一点 P と π の外部の一点 Q とを含むから E_ν は π と必ず共通点を持つ. いまその共通点の一つを P_ν で表わせば, 点列 $P_\nu\,(\nu=1,2,\cdots)$ は π 上に少なくとも一つの集積点 P_0 を持つ. 共通部分定理[1]の証明と同様にして, P_0 はすべての E_ν に含まれるから $P_0\in E$ となって π と E とは共通点 P_0 を持つという矛盾に到達する.

以　上

---

1) 第4節定理3を見よ.

索 引

A

ℵ(アレフ) 88
$\aleph_0$ 88,129
アルキメデスの定理 2

B

ベキ
　無理指数の—— 44
　整指数の—— 41
　有理指数の—— 42
ベルンシュタイン 89
　——の対等定理 88
　——の定理 88
ボルツァノ=ワイエルシュトラスの定理 143
ボレル=ルベーグ
　——の被覆定理 139
　——の定理 139,141,148
部分集合 5,77
　——の集合 99
　真—— 77,80
分数 1,61
ブラリ=フォルティの逆理 118

C

カントル 63,64,76
　——の集合 152
カントル=ベンディクソンの定理 151
コーシーの定理 37

D

第一級 122
第二級 122
第三級 122
代数的数 76
　——の集合 96
大小 66
デデキント 1,4,25
　——の定理 22
導集合 130,132

E

e 54
η 105
円板
　閉—— 131
　開—— 131

F

$\mathfrak{f}$ 101

G

外点 131
ガンマ列 123
原像 77
凝集点 129
　——の集合 150

H

配置集合 85,86,99,100,102
閉包 137
平行 87
平面 128
閉正方形 137
閉集合 130,132,135
　有界—— 141,144,148,149
閉多辺形 159
被覆定理 139
　ボレル=ルベーグの—— 139
　リンデレーフの—— 139,142,150
方向 88
方程式 96

I

一般の型の和 106
一対一の対応 5, 78, 79
一様に連続 148, 149

J

ジョルダン
——曲線 154
——の曲線定理 158

K

下限 26
下方に有界 26
可付番無限集合 80
高々—— 94
可付番無限順序数 122
可付番集合 94
開集合 130, 132, 135
下界 26
函数 78, 102
完全集合 131, 150, 151, 153
型 105
型 ω 114
系列
——の項 78
n 項—— 95
無限—— 78
有限—— 78
二項—— 96, 98
単調減少—— 144
計数 105
結合法則 2
結合集合 85, 86
基本列 64, 72
近傍 126
既約分数 61
高度 96
交換法則 2
孤立数 117
孤立集合 150
孤立点 128, 131, 153
格子点 95
個数 79
区間
補—— 152
開—— 127, 138
矩形 98
閉—— 131, 137
開—— 131
屈折線 154
閉—— 159
境界点 131, 136
極限論 4
極限数 117
極限集合 84
最大—— 84
最小—— 84
極限点 129
極限値 35, 36, 71
最大—— 29
最小—— 32
曲線 154
閉—— 154
単純—— 154
開—— 154
単純—— 154
距離 126, 145
共通部分定理 144, 160
級数 40
——の和 40

L

リンデレーフの被覆定理 139, 142, 150

M

−∞(マイナス無限大) 29
+∞(プラス無限大) 28
無限系列 78
——の集合 93
無限集合 79
無理数 18, 68
——の集合 97
無理点 23

N

n 項系列　95
n 進小数　101
n 次元空間　95, 126
　——の矩形　96
n 乗根　41
内点　131
二項系列　96, 98
二進小数の集合　93
濃度　86, 87, 158
　——のベキ　92, 93
　——の比較　91
　——の積　92, 93
　——の和　92, 93
　極限——　121
　整列集合の——　115

O

ω　105
ω^*　105

P

p を基数とする小数(p 進小数)　60
p 進法式　56
p 進小数　60
ペアノ曲線　155

R

ρ 近傍　127
零　1
連続
　一様に——　148, 149
連続函数　53, 101, 148
　——の集合　102
　不——　102
連続性の定理　22
連続体　88, 154, 155, 158
　——問題　97, 122
　有界な——　159
領域　154, 155, 156

S

差　2
最大極限値　28
最大値　148
最小極限値　28
最小値　148
シュワルツの不等式　127
成分　156
整列可能定理　91, 123
整列集合　109
　——の濃度　115
整数　1
積　2
　——の配分法則　2
　——の結合法則　2
　——の交換法則　2
積(順序ある和集合)　107
選択公理　123
截片　112
切断　4
　——の大小　8
　——の差　12
　——の積　13
　——の商　16
　——の種類　6
　——の定義　4
　——の和　9
　有理数の——　1
四則　2
始数　120
下組　4
下数　4
自然数　1, 105
　——の加法，減法，乗法，除法　1
　——の集合　79
相等　66
相似　104
　——な対応　104
数列　28, 78
　収束——　37, 72
数集合　26

数直線 23, 126, 128
写像 77
商 2
小数 56
無限—— 86, 87, 98
有限—— 87
集合 4
——の意味 76
——列 78
部分—— 5, 77
部分集合の—— 99
代数的数の—— 96
導—— 130, 132
合併—— 81
配置—— 85, 86, 99, 100, 102
閉—— 130, 132, 135
補—— 81, 82, 131, 135
可付番無限—— 80
開—— 130, 132, 135
完全—— 131, 150, 151, 153
空—— 77, 144
共通—— 81
無限—— 79
無限系列の—— 93
無理数の—— 97
二進小数の—— 93
連続函数の—— 102
整列—— 109
積—— 81
自然数の—— 79
数—— 26
小数の—— 93
超越数の—— 97
有限—— 79
有理数の—— 1, 96
実数の—— 97
像—— 77
順序のある—— 1, 102, 103
順序数の—— 116
和—— 81
集合論 5
集積点 128
点列の—— 129
収束する 37, 40

T

互いに素 77, 92, 138
高々可付番無限な集合 94
対角線の方法 87, 99
対数 50, 51
——に関する定理 52
自然—— 54
対等 5, 78, 79, 87, 89
単調減少 39, 84, 85
——系列 144
単調増加 38, 84, 85
単純である 154
単純閉曲線 154
単純開曲線 154
単純曲線 155
底 41, 51
点 95, 126
点列 78
——の集積点 129
到達可能な境界点 158
超越数 76
——の集合 97
超限帰納法 118
超限順序数 117
長方形 96
直交軸 126
直線の連続性の公理 24
稠密性 3, 107

U

上組 4
上数 4

W

和 2
——の結合法則 2
——の交換法則 2

X

[x]　56

Y

要素　76
　代表——　123
　極限——　110
　直後の——　107,110
　直前の——　107
有限系列　78
有限集合　79
有限順序数　122
有界　26
　下方に——　26
　上方に——　26
有理数　1
　——の組分け　3
　——の切断　1
　——の集合　96
有理点　23,96
有理実数　18,68

Z

座標　126
　直角——　126
ツェルメロ　123
自己稠密集合　130
実数　18,66
　——の大小　19
　——の基本列　69
　——の連続性　20,22
　——の切断　20
　——の集合　97
　——の定義　18
　——の稠密性　19
　——の絶対値　18
像　77
　——集合　77
上限　26
上方に有界　26
上界　26
乗根の存在定理　41
順序ある和集合　106
順序型　104,105
　——η　107
　——の積　105
　——の和　105
順序の性質　115
順序数　105,114
　——の比較　114
　——の集合　116
　可付番無限——　122
　超限——　114,117
　有限——　122
順序数列　119
順序付けられた和集合　106
十進小数　100

極限論と集合論

1944年11月10日 第1刷発行
1970年11月20日 改版第1刷発行 ©　　¥800

著者　能代清（のしろきよし）

発行者　岩波雄二郎

東京都千代田区一ツ橋2-5-5
発行所　株式会社 岩波書店

落丁・乱丁本はお取替いたします　　三秀舎印刷・青木製本